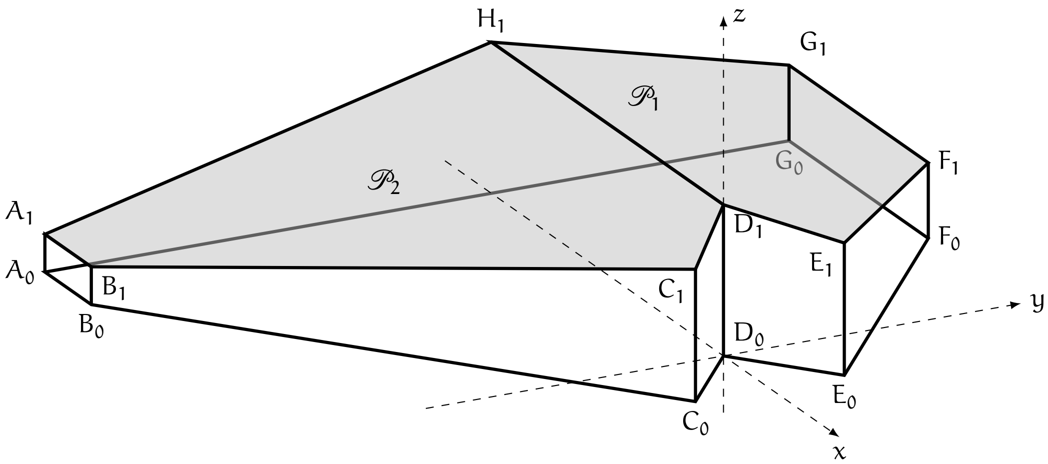
# Devoir surveillé N°5 (3h)

## Exercice I

*(Géométrie dans l'espace* – extrait concours Geipi polytech 2022*)* La figure ci-dessous représente un bâtiment.

- Le sol est délimité par le polygone $A_0B_0C_0D_0E_0F_0G_0$,
- La toiture est composée des deux plans $\mathscr{P}_1 = (H_1D_1E_1)$ et $\mathscr{P}_2 = (A_1D_1H_1)$,
- Les façades $A_0B_0B_1A_1$ et $G_0F_0F_1G_1$ sont rectangulaires et sont contenues dans les plans $\mathscr{P}_3$ et $\mathscr{P}_4$ qui sont parallèles.
- Les plans contenant les sept façades sont orthogonaux au plan du sol.
- Les droites $(A_1B_1)$, $(H_1D_1)$ et $(G_1F_1)$ sont parallèles.




L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On donne les coordonnées des points suivants :

$$A_0(-10,-12,0),\quad B_0(-8,-12,0),\quad C_0(2,-2,0),\quad D_0(0,0,0),\quad E_0(2,2,0),\quad F_0(-4,8,0),\quad G_0(-10,8,0)$$

$$A_1(-10,-12,2),\quad C_1(2,-2,7),\quad D_1(0,0,8),\quad E_1(2,2,7),\quad H_1(-10,0,8)$$

**Q 1** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n_1}(0,1,2)$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$, puis en déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$.

> ▶ **Réponse :**
>
> On a$\overrightarrow{D_1H_1} = (-10,0,0)$ et $\overrightarrow{D_1E_1} = (2,2,-1)$.
> On vérifie que $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{D_1H_1} = 0$ et $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{D_1E_1} = 0$, donc $\overrightarrow{n_1}$ est normal à $\mathscr{P}_1$.
> Puisque $\overrightarrow{n_1}$ est normal à $\mathscr{P}_1$, sachant que $H_1 \in \mathscr{P}_1$, une équation cartésienne de $\mathscr{P}_1$ est alors $0(x+10) + 1(y-0) + 2(z-8) = 0$, soit $\boxed{\mathscr{P}_1 : y + 2z - 16 = 0}$.

**Q 2** Le point $F_1$ a pour coordonnées $F_1(-4,8,z_1)$. Déterminer la valeur de $z_1$ et en déduire la longueur $F_0F_1$.

> ▶ **Réponse :**
>
> Puisque $F_1 \in \mathscr{P}_1$ en remplaçant les coordonnées de $F_1$, on obtient $8 + 2z_1 - 16 = 0$, d'où $\boxed{z_1 = 4}$.
>
> La longueur $F_0F_1$ est alors $F_0F_1 = \|VF_0F_1\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right\|$. D'où $\boxed{F_0F_1 = 4}$.

**Q 3** À partir des données de l'énoncé, justifier avec soin que les points $B_1$ et $C_1$ appartiennent au plan $\mathscr{P}_2$.

▶ Réponse :

- Puisque $(A_1B_1)$ et $(H_1D_1)$ sont parallèles, alors $B_1 \in \mathscr{P}_2$.
- Pour $C_1$ on peut montrer que les 4 points $A_1$, $H_1$, $D_1$ et $C_1$ sont coplanaires. Pour cela on peut calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{A_1H_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ et $\overrightarrow{A_1C_1}$.
  On a $\det\left(\overrightarrow{A_1H_1}, \overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 10 \\ 6 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Cela confirme que $C_1$ appartient au plan $\mathscr{P}_2$.

**Q 4** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan $(B_0C_0C_1)$ est donnée par : $x - y - 4 = 0$.

▶ Réponse :

On peut vérifier quel les coordonnées de $B_0$, $C_0$ et $C_1$ vérifient bien l'équation $x - y - 4 = 0$.
En effet, $B_0(-8, -12, 0)$ vérifie $-8 - (-12) - 4 = 0$, $C_0(2, -2, 0)$ vérifie $2 - (-2) - 4 = 0$ et $C_1(2, -2, 7)$ vérifie $2 - (-2) - 4 = 0$. Donc les trois points $\boxed{B_0,\ C_0 \text{ et } C_1 \text{ appartiennent au plan d'équation } x - y - 4 = 0}$.

**Q 5** On admet qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ est : $y - 2z + 16 = 0$. En déduire une équation paramétrique de la droite $(B_1C_1)$.

▶ Réponse :

La droite $(B_1C_1)$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_2$ et $(B_0C_0C_1)$. On peut envisager au moins deux méthodes :

- Méthode 1 : on peut trouver un vecteur directeur de la droite $(B_1C_1)$ en calculant le produit vectoriel des vecteurs normaux des plans $\mathscr{P}_2$ et $(B_0C_0C_1)$. On trouve alors que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $(B_1C_1)$. Puisque $C_1$ appartient à la droite $(B_1C_1)$, une équation paramétrique de la droite $(B_1C_1)$ est alors donnée par : $\boxed{(B_1C_1) \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -2 - 2k \\ z = 7 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}}$.
- Méthode 2 : on peut aussi trouver une équation paramétrique de la droite $(B_1C_1)$ en résolvant le système formé par les équations des plans $\mathscr{P}_2$ et $(B_0C_0C_1)$ :

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ y - 2z = -16 \end{cases}$$

  Ce système est déjà échelonné, on prend $z = k$ comme paramètre, puis on trouve $y = 2z - 16 = 2k - 16$ et $x = y + 4 = 2k - 12$. On peut vérifier que cela donne la même droite...

**Q 6** Justifier rapidement que les droites $(B_1C_1)$ et $(A_1H_1)$ sont sécantes.

▶ Réponse :

On a vu que $B_1$ et $C_1$ appartiennent au plan $\mathscr{P}_2$, de même que $A_1$ et $H_1$. Donc les droites $(B_1C_1)$ et $(A_1H_1)$ sont sécantes ou parallèles. Or elles ne sont pas parallèles. En effet, un vecteur directeur de la droite $(A_1H_1)$ est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$, qui n'est pas colinéaire à $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{\text{les droites } (B_1C_1) \text{ et } (A_1H_1) \text{ sont sécantes}}$.

**Q 7** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite $(A_1H_1)$ est donnée par : $\begin{cases} x = -10 \\ y = 2k \\ z = 8 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

▶ Réponse :

On a vu $\overrightarrow{A_1H_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $(A_1H_1)$, et $H_1(-10, 0, 8)$ appartient à la droite $(A_1H_1)$. Donc une représentation paramétrique de la droite $(A_1H_1)$ est donnée par : $\boxed{(A_1H_1)\begin{cases} x = -10 \\ y = 2k \\ z = 8 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}}$.

**Q 8** On souhaite prolonger le plan de toit $\mathscr{P}_2$ jusqu'au sol. Cela est-il possible ? Justifier.

▶ Réponse :

On cherche le point K intersection des droites $(A_1H_1)$ et $(B_1C_1)$. Pour que le toit puisse être prolongé jusqu'au sol, il faut que le $z_K < 0$.
On résout :

$$\begin{cases} 2 - 2k = -10 \\ -2 - 2k = 2t \\ 7 - k = 8 + t \end{cases}$$

On obtient $k = 6$, $t = -7$ et $K(-10, -14, 1)$. Donc $z_K > 0$, donc $\boxed{\text{le toit ne peut pas être prolongé jusqu'au sol}}$.

## Exercice II

**Q 9** On considère un système à $n$ équations et $p$ inconnues. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang du système (en fonction de $n$ et/ou $p$), pour que celui-ci admette une unique solution ?

▶ Réponse :

Le système doit être compatible. Ensuite pour avoir une unique solution il faut et il suffit que le rang du système soit égal au nombre d'inconnues, c'est à dire $p$. Donc la condition nécessaire et suffisante (à condition que le système soit compatible) est : $\boxed{\mathrm{rang}(A) = p}$.

**Q 10** On considère encore un système à $n$ équations et $p$ inconnues. Reproduire ce tableau sur votre copie en mettant dans chaque case « OUI » si la situation est possible et « NON » sinon.

| Le syst. peut admettre | aucune solution | une unique solution | une infinité de solutions |
|---|---|---|---|
| Si $p > n$ | Oui | Non | Oui |
| Si $p < n$ | Oui | Oui | Oui |
| Si $p = n$ | Oui | Oui | Oui |

**Q 11** Déterminer la matrice échelonnée réduite de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

▶ Réponse :

En effectuant les opérations élémentaires sur les lignes, on trouve que la matrice échelonnée réduite de A est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Q 12** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les trois vecteurs $v_1(1, 0, 1, 0)$, $v_2(0, 1, 2, 0)$ et $v_3(3, 1, 0, 1)$.
Forment-ils une famille libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^4$ ?

▶ **Réponse :**

On cherche à déterminer si le système $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$ admet une autre solution que la solution nulle. La matrice associée à ce système est :

$$B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

En échelonnant cette matrice, on trouve :

$$B\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 3, donc le système $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$ admet une unique solution, qui est la solution nulle. Donc $\boxed{\text{les vecteurs } v_1,\ v_2 \text{ et } v_3 \text{ forment une famille libre}}$.
Par ailleurs, le rang de la matrice B est égal à 3, qui est strictement inférieur à 4.
Donc $\boxed{\text{les vecteurs } v_1,\ v_2 \text{ et } v_3 \text{ ne forment pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

**Q 13** Soit $G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/\begin{cases}x-y+t=0\\2x-y-z=0\end{cases}\right\}$.
Montrer que $G=\mathrm{Vect}(u,v)$ où $u$ et $v$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ à déterminer.

▶ **Réponse :**

Pour trouver les vecteurs $u$ et $v$, on va résoudre le système dont la matrice associée est :

$$C=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\2&-1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}$$

En prenant $z$ et $t$ comme paramètres, on trouve $y=z+2t$ et $x=y-t=z+t$.

Donc $G=\{(z+t,z+2t,z,t),z,t\in\mathbb{R}\}$. En posant $z=1$ et $t=0$, on trouve le vecteur $u=(1,1,1,0)$, et en posant $z=0$ et $t=1$, on trouve le vecteur $v=(1,2,0,1)$.
Donc $\boxed{G=\mathrm{Vect}(u,v) \text{ avec } u=(1,1,1,0) \text{ et } v=(1,2,0,1)}$.

## Exercice III

On considère l'ensemble $C=\left\{-2+\dfrac{n+1}{n^2},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$

*Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin.*

**Q 14** Soit X un ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$. Donner une définition « en français » puis « avec des $\varepsilon$ » de la borne inférieure de X.

▶ **Réponse :**

- Définition en français : la borne inférieure de X est le plus grand minorant de X.
- Définition avec des $\varepsilon$ : un réel $m$ est la borne inférieure de X si et seulement si :
  - $\forall x\in X, m\leqslant x$,
  - $\forall\varepsilon>0,\exists x\in X, x<m+\varepsilon$.

**Q 15** Justifier que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a $n^2-n-1>0$.

▶ **Réponse :**

Les racines du polynôme $P(X)=X^2-X-1$ sont données par $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Le polynôme étant du signe de « a à l'extérieur des racines », on a $P(n) > 0$ pour tout $n > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or ce nombre est inférieur à 2, donc pour tout entier $\boxed{n \geqslant 2, \text{ on a } n^2 - n - 1 > 0}$.

**Q 16** Justifier alors que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{n+1}{n^2} \leqslant 2$.

▶ **Réponse :**

On étudie le signe de $2 - \dfrac{n+1}{n^2}$. On trouve que $2 - \dfrac{n+1}{n^2} = \dfrac{2n^2 - n - 1}{n^2}$. C'est un trinôme du second degré dont les racines sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$. Le trinôme étant du signe de « a à l'extérieur des racines », on a $2n^2 - n - 1 > 0$ pour tout $n > 1$. Donc pour tout entier $\boxed{n \geqslant 1, \text{ on a } \dfrac{n+1}{n^2} \leqslant 2}$.

**Q 17** Montrer que C est borné.

▶ **Réponse :**

On vient de voir que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{n+1}{n^2} \leqslant 2$. Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $-2 + \dfrac{n+1}{n^2} \leqslant 0$.

De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{n+1}{n^2} > 0$, donc $-2 + \dfrac{n+1}{n^2} > -2$. Donc $\boxed{\text{C est borné par -2 et 0}}$.

**Q 18** Déterminer (en le justifiant) la borne supérieure de C.

▶ **Réponse :**

On a vu que 0 était un majorant pour C. Or ce majorant est atteint pour $n = 1$, donc c'est le maximum et donc $\boxed{\text{la borne supérieure de C est 0}}$.

**Q 19** Déterminer (en le justifiant) la borne inférieure de C.

▶ **Réponse :**

On a vu que $-2$ était un minorant pour C. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n$ suffisamment grand pour que $\dfrac{n+1}{n^2} < \varepsilon$. Donc $-2 + \dfrac{n+1}{n^2} < -2 + \varepsilon$. Donc $\boxed{\text{la borne inférieure de C est -2}}$.

**Q 20** Déterminer les éventuels maximum et minimum de C.

▶ **Réponse :**

On a vu que $\boxed{\text{0 était le maximum de C}}$.
En revanche, $-2$ n'est pas un élément de C car $-2 \neq -2 + \frac{n+1}{n^2}$ n'a pas de solution.
Donc $\boxed{\text{C n'admet pas de minimum}}$.

## Exercice IV

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

**Q 21** À l'aide d'une « récurrence descendante », déterminer la forme explicite de la suite $(u_n)$.

▶ **Réponse :**

On écrit la formule « $u_{k+1} = 3u_k + 2$ » pour $k = n-1$, $k = n-2$, ..., $k = 0$ et on trouve :

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + 2 \\ u_{n-1} = 3u_{n-2} + 2 \\ \vdots \\ u_1 = 3u_0 + 2 \end{cases}$$

On multiplie les lignes successivement pas $3^0$, $3^1$, ..., $3^{n-1}$ et on trouve en les ajoutant :

$$u_n = 3^n u_0 + 2\sum_{k=0}^{n-1} 3^k$$

Or $u_0 = 0$ et $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \dfrac{3^n - 1}{3-1}$. Donc $\boxed{u_n = 3^n - 1}$.

**Q 22** On se propose ici de retrouver cette expression par une autre méthode. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $v_n = u_n + 1$. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3.

▶ **Réponse :**

On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 2 + 1 = 3(u_n + 1) = 3v_n$. Donc $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 3}$.

**Q 23** Donner la forme explicite de $(v_n)$, puis celle de $(u_n)$, et comparer avec le résultat de Q 21.

▶ **Réponse :**

On a $v_0 = u_0 + 1 = 1$. Donc $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$. Donc $\boxed{v_n = 3^n}$.

Par conséquent, $\boxed{u_n = v_n - 1 = 3^n - 1}$, ce qui est cohérent avec le résultat de Q 21.

**Q 24** Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

▶ **Réponse :**

On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (3^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{n} 1$.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{3-1}$ et $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Donc $\boxed{S_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2} - (n+1)}$.

**Q 25** Déterminer la limite de $\dfrac{S_n}{3^n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

▶ **Réponse :**

On a $\dfrac{S_n}{3^n} = \dfrac{\dfrac{3^{n+1} - 1}{2} - (n+1)}{3^n} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2 \times 3^n} - \dfrac{n+1}{3^n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{2 \times 3^n} = \frac{3}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{3^n} = 0$. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{3^n} = \frac{3}{2}}$.

## Exercice V

**Q 26** Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de : « $(u_n)$ converge vers $\ell$ ».

▶ **Réponse :**

La suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ si et seulement si : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon}$.

**Q 27** Soit $(u_n)$ une suite dont tous les termes sont des entiers relatifs. Montrer à l'aide de la définition que si cette suite converge vers un réel $\ell$, alors $\ell$ est un entier.

▶ **Réponse :**

Supposons que $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$ qui n'est pas un entier. Alors il existe un entier $k = \mathrm{Ent}(\ell)$ tel que $k < \ell < k+1$. En prenant $\varepsilon$ de telle sorte que $k < \ell - \varepsilon < \ell + \varepsilon < k+1$, on trouve que pour tout $n \geqslant n_0$, $k < \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon < k+1$. Or $u_n$ est un entier, il y a contradiction. Donc $\boxed{\text{si } (u_n) \text{ converge vers un réel } \ell, \text{ alors } \ell \text{ est un entier}}$.

## Exercice VI

Soit $(u_n)$ une suite bornée par $-1$ et 2. Soit $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n + 2}$.

**Q 28** Montrer que $(v_n)$ est bornée.

▶ **Réponse :**

Puisque $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$, on a $1 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4$. Donc $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{u_n+2} \leqslant 1$. En multipliant par -2, on trouve que $-2 \leqslant -\dfrac{2}{u_n+2} \leqslant -\dfrac{1}{2}$. En ajoutant 1, on trouve que $-1 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{(v_n) \text{ est bornée par -1 et } \dfrac{1}{2}}$.

**Q 29** On sait de plus que $(u_n)$ est décroissante. Montrer dans ce cas que $(v_n)$ est aussi décroissante.

▶ **Réponse :**

Étudions le signe de $v_{n+1} - v_n$ :

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 - \frac{2}{u_{n+1}+2}\right) - \left(1 - \frac{2}{u_n+2}\right) = \frac{2}{u_n+2} - \frac{2}{u_{n+1}+2} = \frac{2(u_{n+1}-u_n)}{(u_n+2)(u_{n+1}+2)}$$

Or $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (car $u_n$ est décroissante) et $(u_n+2)(u_{n+1}+2) > 0$ (car $u_n \geqslant -1$).
Donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$.

**Q 30** Que dire à propos d'une limite éventuelle de la suite $(v_n)$ ?

▶ **Réponse :**

$(v_n)$ est décroissante et minorée par -1, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant -1$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ admet une limite } \ell \text{ qui est supérieure ou égale à -1}}$.