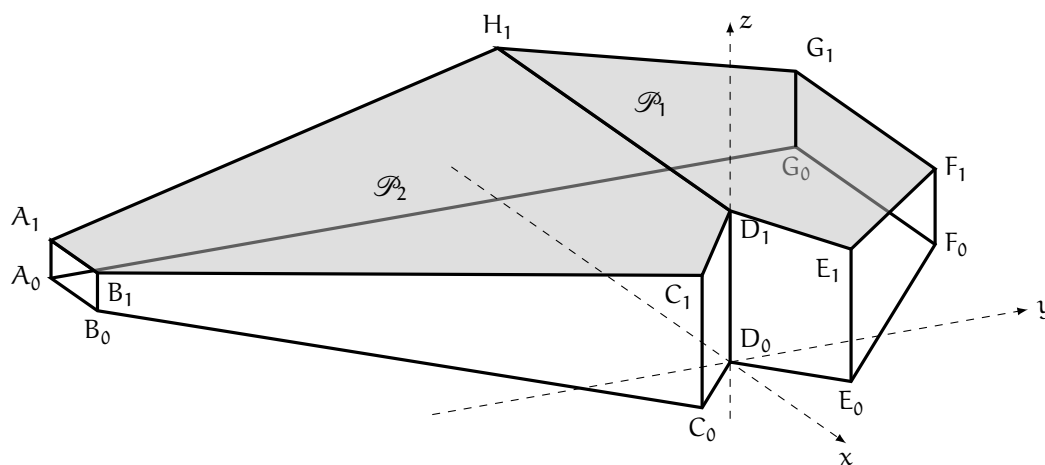


DEVOIR SURVEILLÉ N°5 (3H)

Exercice I

(Géométrie dans l'espace – extrait concours Geipi polytech 2022) La figure ci-dessous représente un bâtiment.

- Le sol est délimité par le polygone $A_0B_0C_0D_0E_0F_0G_0$,
- La toiture est composée des deux plans $\mathcal{P}_1 = (H_1D_1E_1)$ et $\mathcal{P}_2 = (A_1D_1H_1)$,
- Les façades $A_0B_0B_1A_1$ et $G_0F_0F_1G_1$ sont rectangulaires et sont contenues dans les plans \mathcal{P}_3 et \mathcal{P}_4 qui sont parallèles.
- Les plans contenant les sept façades sont orthogonaux au plan du sol.
- Les droites (A_1B_1) , (H_1D_1) et (G_1F_1) sont parallèles.



L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les coordonnées des points suivants :

$$A_0(-10, -12, 0), \quad B_0(-8, -12, 0), \quad C_0(2, -2, 0), \quad D_0(0, 0, 0), \quad E_0(2, 2, 0), \quad F_0(-4, 8, 0), \quad G_0(-10, 8, 0)$$

$$A_1(-10, -12, 2), \quad C_1(2, -2, 7), \quad D_1(0, 0, 8), \quad E_1(2, 2, 7), \quad H_1(-10, 0, 8)$$

- Q 1** Montrer que le vecteur $\vec{n}_1(0, 1, 2)$ est normal au plan \mathcal{P}_1 , puis en déduire une équation cartésienne du plan \mathcal{P}_1 .
- Q 2** Le point F_1 a pour coordonnées $F_1(-4, 8, z_1)$. Déterminer la valeur de z_1 et en déduire la longueur F_0F_1 .
- Q 3** À partir des données de l'énoncé, justifier avec soin que les points B_1 et C_1 appartiennent au plan \mathcal{P}_2 .
- Q 4** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan $(B_0C_0C_1)$ est donnée par : $x - y - 4 = 0$.
- Q 5** On admet qu'une équation cartésienne du plan \mathcal{P}_2 est : $y - 2z + 16 = 0$. En déduire une équation paramétrique de la droite (B_1C_1) .
- Q 6** Justifier rapidement que les droites (B_1C_1) et (A_1H_1) sont sécantes.
- Q 7** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (A_1H_1) est donnée par :
$$\begin{cases} x = -10 \\ y = 2k \\ z = 8 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$
- Q 8** On souhaite prolonger le plan de toit \mathcal{P}_2 jusqu'au sol. Cela est-il possible ? Justifier.

Exercice II

- Q 9** On considère un système à n équations et p inconnues. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang du système (en fonction de n et/ou p), pour que celui-ci admette une unique solution ?
- Q 10** On considère encore un système à n équations et p inconnues. Reproduire ce tableau sur votre copie en mettant dans chaque case « OUI » si la situation est possible et « NON » sinon.

Le syst. peut admettre	aucune solution	une unique solution	une infinité de solutions
Si $p > n$			
Si $p < n$			
Si $p = n$			

Q 11 Déterminer la matrice échelonnée réduite de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Q 12 Dans \mathbb{R}^4 , on considère les trois vecteurs $v_1(1, 0, 1, 0)$, $v_2(0, 1, 2, 0)$ et $v_3(3, 1, 0, 1)$.
Forment-ils une famille libre ? Génératrice de \mathbb{R}^4 ?

Q 13 Soit $G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \right\}$.

Montrer que $G = \text{Vect}(u, v)$ où u et v sont des vecteurs de \mathbb{R}^4 à déterminer.

Exercice III

On considère l'ensemble $C = \left\{ -2 + \frac{n+1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin.

Q 14 Soit X un ensemble non vide et minoré de \mathbb{R} . Donner une définition « en français » puis « avec des ε » de la borne inférieure de X .

Q 15 Justifier que pour tout entier $n \geq 2$ on a $n^2 - n - 1 > 0$.

Q 16 Justifier alors que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\frac{n+1}{n^2} \leq 2$.

Q 17 Montrer que C est borné.

Q 18 Déterminer (en le justifiant) la borne supérieure de C .

Q 19 Déterminer (en le justifiant) la borne inférieure de C .

Q 20 Déterminer les éventuels maximum et minimum de C .

Exercice IV

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

Q 21 À l'aide d'une « récurrence descendante », déterminer la forme explicite de la suite (u_n) .

Q 22 On se propose ici de retrouver cette expression par une autre méthode. Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = u_n + 1$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

Q 23 Donner la forme explicite de (v_n) , puis celle de (u_n) , et comparer avec le résultat de Q 21.

Q 24 Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Q 25 Déterminer la limite de $\frac{S_n}{3^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice V

Q 26 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de : « (u_n) converge vers ℓ ».

Q 27 Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont des entiers relatifs. Montrer à l'aide de la définition que si cette suite converge vers un réel ℓ , alors ℓ est un entier.

Exercice VI

Soit (u_n) une suite bornée par -1 et 2 . Soit $v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 2}$.

Q 28 Montrer que (v_n) est bornée.

Q 29 On sait de plus que (u_n) est décroissante. Montrer dans ce cas que (v_n) est aussi décroissante.

Q 30 Que dire à propos d'une limite éventuelle de la suite (v_n) ?