

DEVOIR SURVEILLÉ N°4 (3H)

L'usage de la calculatrice N'est PAS autorisé.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le barème est approximatif et indicatif. Il pourra être adapté en fonction des copies. Les exercices sont indépendants.

Vous rendrez cette feuille recto-verso complétée (Exos I et II) pour récupérer la suite du sujet.
 (Conseil : ne pas dépasser 30'...)

Exercice I (6 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en cochant la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée.

Barème : +0,5 si juste, -0,5 si faux, 0 si pas de réponse.

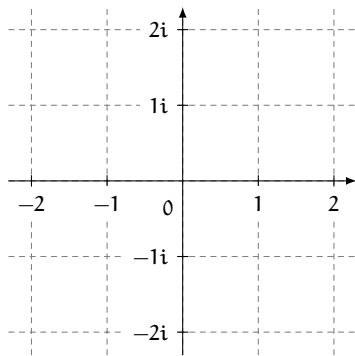
	Vrai	Faux
a. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{ix} \in \mathbb{U}$ est injective.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b. La fonction $f : z \in \mathbb{C} \longrightarrow 3z - 2 \in \mathbb{C}$ est bijective.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c. L'application $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto z^2 \in \mathbb{C}$ est surjective.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d. Une application qui n'est pas injective est surjective.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $B \subset E$. On a toujours $f^{-1}[f(B)] = B$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
f. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + ib = 0 \implies a = b = 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
g. $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, (a + ib = 0 \implies a = b = 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
h. Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, alors z^n a pour argument $n + \arg(z)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
i. La valeur moyenne d'une fonction f définie sur $[a; b]$ est $\frac{f(a) + f(b)}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
j. Les solutions de l'équation différentielles $y' + ay = 0$ sont les $y_h(x) = \lambda e^{ax}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
k. Les courbes représentant deux solutions distinctes d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ne peuvent pas se croiser.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
l. L'équation $y'' + ay' + by = 0$ pourrait ne pas admettre de solution réelle lorsque le discriminant de son équation caractéristique associée est négatif.....	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Exercice II (4 points)

Dans chaque cas, déterminer et dessiner l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

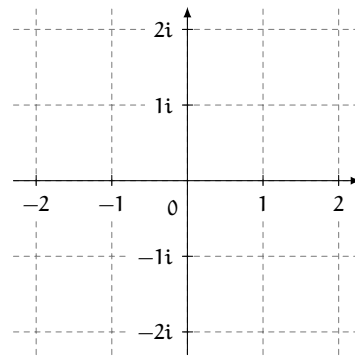
$$\mathcal{E}_1 = \{M(z), |z + 2i| = |z - 2|\} :$$

.....



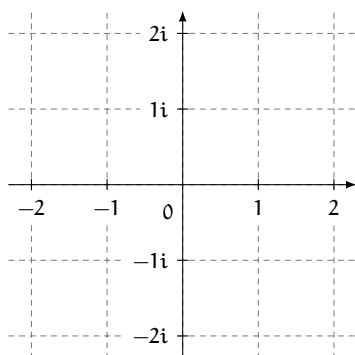
$$\mathcal{E}_2 = \{M(z), |\bar{z} + i - 1| = 1\} :$$

.....



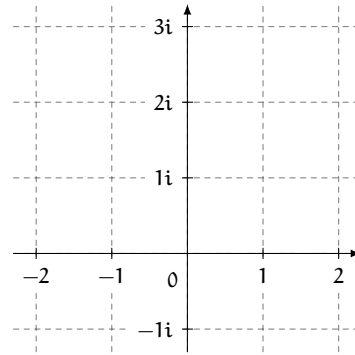
$$\mathcal{E}_3 = \left\{M(z), \arg(z) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]\right\} :$$

.....



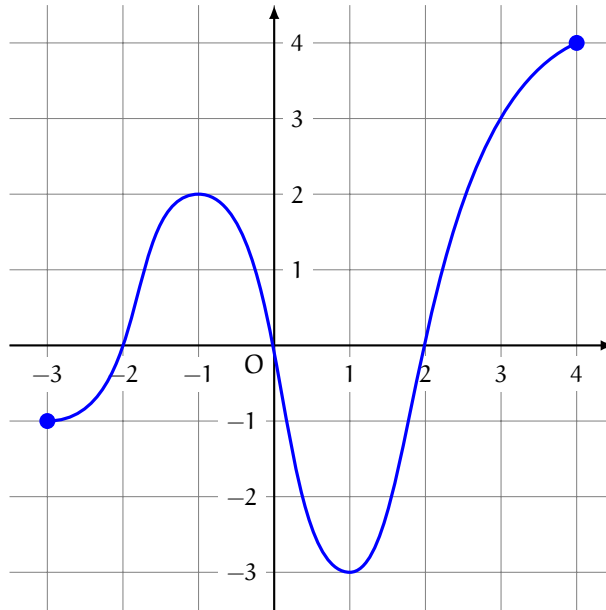
$$\mathcal{E}_4 = \left\{M(z), \arg(\bar{z} + i) = \frac{\pi}{4} [\pi]\right\} :$$

.....



Exercice III (7 points)

On considère une fonction f définie sur $I = [-3; 4]$ par le graphique ci-dessous :



Q1 Déterminer par lecture graphique les ensembles suivants :

- a. $f([-3; 0])$ b. $f([0; 4])$ c. $f^{-1}([0; 3])$ d. $f^{-1}([3; 4])$ e. $f^{-1}(\mathbb{R})$

► Réponse :

- a. $f([-3; 0]) = [-1; 2]$ b. $f([0; 4]) = [-3; 4]$ c. $f^{-1}([0; 3]) = [-2; 0] \cup [2; 3]$ d. $f^{-1}([3; 4]) = [3; 4]$ e. $f^{-1}(\mathbb{R}) = [-3; 4]$

Q2 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = [0; \pi]$ par $g(x) = 2 \cos(x) + x$. Étudier les variations de la fonction g puis déterminer $g(I)$.

► Réponse :

La fonction g est dérivable sur $[0; \pi]$ et on a :

$$g'(x) = -2 \sin(x) + 1$$

On étudie le signe de $g'(x)$:

$$g'(x) \geq 0 \iff -2 \sin(x) + 1 \geq 0 \iff \sin(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$$

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π		
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$	2	$\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	$\pi - 2$		

Or on a $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} > \pi - 2$ et $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} < 2$. Donc $g(I) = \left[\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}; \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \right]$.

Q3 On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 1 - x^2$. Déterminer $h^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

► Réponse :

On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que $h(x) \geq 0$:

$$h(x) \geq 0 \iff 1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff x \in [-1; 1]$$

Donc $h^{-1}(\mathbb{R}^+) = [-1; 1]$.

Q4 On considère alors la fonction $k: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto xy$

Est-ce que k est injective ? Surjective ? Bijective ? (Justifier).

► Réponse :

La fonction k n'est pas injective car par exemple $k(1, 2) = k(2, 1) = 2$.

La fonction k est surjective car pour tout $z \in \mathbb{R}$, on peut trouver $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $k(x, y) = z$. Par exemple, on peut choisir $x = z$ et $y = 1$.

Donc la fonction k n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

Exercice IV (7 points)

On considère l'équation différentielle : (E) : $y'' - 4y' + 5y = x$

Q5 Résoudre l'équation homogène associée à (E).

► Réponse :

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2i)^2$.

Les racines sont donc complexes conjuguées :

$$r_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad r_2 = 2 - i$$

Donc les solutions réelles de l'équation homogène associée sont de la forme :

$$y_h(x) = e^{2x} (A \cos(x) + B \sin(x))$$

avec A et B deux réels.

Q6 Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction affine.

► Réponse :

On pose $y_p(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc $y_p'(x) = a$ et $y_p''(x) = 0$.

En remplaçant dans (E) on obtient :

$$0 - 4a + 5(ax + b) = x \iff (5a)x + (-4a + 5b) = x + 0$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} 5a = 1 \\ -4a + 5b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{4}{25} \end{cases}$$

Donc une solution particulière de (E) est :

$$y_p(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$$

Q7 Donner toutes les solutions de l'équation (E).

► Réponse :

D'après les questions précédentes, les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = e^{2x} (A \cos(x) + B \sin(x)) + \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$$

avec A et B deux réels.

Q8 Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

► Réponse :

On calcule $f(0)$:

$$f(0) = e^0(A \cos(0) + B \sin(0)) + \frac{1}{5} \times 0 + \frac{4}{25} = A + \frac{4}{25}$$

$$\text{Donc } f(0) = 0 \iff A + \frac{4}{25} = 0 \iff A = -\frac{4}{25}.$$

On calcule $f'(x)$ en utilisant la formule du produit :

$$f'(x) = e^{2x} (2(A \cos(x) + B \sin(x)) + (-A \sin(x) + B \cos(x))) + \frac{1}{5}$$

Donc :

$$f'(0) = e^0(2(A \cos(0) + B \sin(0)) + (-A \sin(0) + B \cos(0))) + \frac{1}{5} = 2A + B + \frac{1}{5}$$

$$\text{Donc } f'(0) = 0 \iff 2A + B + \frac{1}{5} = 0 \iff B = -2A - \frac{1}{5}.$$

En remplaçant la valeur de A, on obtient :

$$B = -2\left(-\frac{4}{25}\right) - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} - \frac{5}{25} = \frac{3}{25} = B$$

Donc la solution cherchée est :

$$f(x) = e^{2x} \left(-\frac{4}{25} \cos(x) + \frac{3}{25} \sin(x) \right) + \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$$

Exercice V (6 points)

On souhaite dans cet exercice déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$(E_1) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x)$$

Q9 Montrer que si f est solution de (E₁) alors nécessairement f est solution de :

$$(E_2) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f(x)$$

► Réponse :

En dérivant l'équation (E₁) on obtient :

$$f''(x) = -f'(-x)$$

Or d'après (E_1) , $f'(-x) = f(x)$, donc $f''(x) = -f(x)$.

Q 10 Résoudre l'équation différentielle (E_2) .

► Réponse :

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.
Donc les solutions de (E_2) sont de la forme :

$$f(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$$

avec A et B deux réels.

Q 11 Réciproquement, on considère une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ avec A et B deux réels. Montrer que si f est solution de (E_1) , alors $A = B$.

► Réponse :

On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = -A \sin(x) + B \cos(x)$$

On calcule aussi $f(-x)$:

$$f(-x) = A \cos(-x) + B \sin(-x) = A \cos(x) - B \sin(x)$$

Pour que f soit solution de (E_1) , il faut que $f'(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$-A \sin(x) + B \cos(x) = A \cos(x) - B \sin(x)$$

Ce qui est équivalent à :

$$(B - A)(\cos(x) + \sin(x)) = 0$$

La fonction $\cos(x) + \sin(x)$ n'est pas identiquement nulle, donc pour que l'égalité soit vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit que :

$$B - A = 0$$

Donc la seule possibilité est $A = B$.

Q 12 Conclure sur l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) .

► Réponse :

D'après les questions précédentes, les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = A(\cos(x) + \sin(x))$$

avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice VI (6 points)

Q 13 Déterminer la forme algébrique de $z_1 = \frac{3 - 2i}{3i - 2}$.

► Réponse :

On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$z_1 = \frac{(3 - 2i)(-3i - 2)}{(3i - 2)(-3i - 2)} = \frac{-9i - 6 + 6i^2 + 4i}{9 + 4} = \frac{-12 - 5i}{13} = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$$

Q 14 Déterminer la forme algébrique de $z_2 = 2i \times \frac{e^{i\pi/12}}{e^{i5\pi/12}}$

► Réponse :

On utilise les propriétés des exponentielles :

$$\begin{aligned} z_2 &= 2ie^{i(\pi/12-5\pi/12)} = 2ie^{-i4\pi/12} = 2ie^{-i\pi/3} = 2i(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) \\ &= 2i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2i \times \frac{1}{2} - 2i \times i \times \frac{\sqrt{3}}{2} = i + \sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3} + i} \end{aligned}$$

Q 15 Soit λ un réel. On considère les nombres complexes $z_3 = \frac{3\lambda^2 - i}{1 - i}$ et $z_4 = 2 + i$.
Déterminer les éventuels réels λ tels que $z_3 = z_4$.

► Réponse :

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{3\lambda^2 - i}{1 - i} = 2 + i &\iff 3\lambda^2 - i = (2 + i)(1 - i) \\ \iff 3\lambda^2 - i = 2 - 2i + i - i^2 &\iff 3\lambda^2 - i = 3 - i \iff \lambda^2 = 1 \iff \boxed{\lambda = \pm 1} \end{aligned}$$

Exercice VII (6 points)

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ on pose $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

L'objectif est de montrer par trois méthodes différentes la propriété :

$$(P) : |z| = 1 \implies f(z) \in i\mathbb{R}$$

Les trois questions sont indépendantes.

Q 16 *Méthode 1*: en utilisant la forme algébrique (on pose $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

► Réponse :

$$f(z) = \frac{1 + a + ib}{1 - a - ib} = \frac{(1 + a + ib)(1 - a + ib)}{(1 - a - ib)(1 - a + ib)} = \frac{1 - a^2 - b^2 + i2b}{(1 - a)^2 + b^2 + 1}$$

or $|z| = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$, donc le numérateur devient $i2b$ qui est imaginaire pur.

Q 17 *Méthode 2*: en utilisant les conjugués (et donc sans utiliser la forme algébrique).

► Réponse :

On calcule :

$$\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$$

or $|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$, donc

$$\overline{f(z)} = \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{\frac{z+1}{z}}{\frac{z-1}{z}} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{-(1+z)}{-(1-z)} = -\frac{1+z}{1-z} = -f(z)$$

Ainsi $\overline{f(z)} = -f(z)$, ce qui signifie que $f(z)$ est imaginaire pur.

Q 18 *Méthode 3*: en utilisant la forme exponentielle (on pose $z = e^{i\theta}$ et on utilise la technique de l'arc moitié pour factoriser $1+z$ et $1-z$).

► Réponse :

On calcule :

$$f(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} = \frac{\cos(\theta/2)}{i\sin(\theta/2)} = i \times \cotan(\theta/2)$$

qui est bien imaginaire pur.

Exercice VIII (10 points)

On note $Z_0 = -3 - 4i$

Q 19 Déterminer le module et un argument de Z_0 (on utilisera la fonction arctan pour l'argument).

► Réponse :

On a :

$$|Z_0| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

De plus :

$$\arg(Z_0) = \pi + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \quad \text{car } \operatorname{Re}(Z_0) < 0$$

Q 20 On note Z_1 et Z_2 les racines carrées de Z_0 . Déterminer la forme exponentielle de ces racines carrées.

► Réponse :

D'après la question précédente, on a :

$$Z_0 = 5e^{i(\pi + \arctan(\frac{4}{3}))}$$

Les racines carrées sont donc :

$$Z = \pm \sqrt{5}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arctan(\frac{4}{3}))}$$

Q 21 Sans utiliser la forme exponentielle, déterminer la forme algébrique des racines carrées de Z_0 .

► Réponse :

On pose $Z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$Z^2 = Z_0 \iff (x + iy)^2 = -3 - 4i \iff x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2xy = -4 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = -2 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases}$$

En calculant les modules on obtient un relation supplémentaire :

$$(x^2 + y^2)^2 = 5$$

On résout alors le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = -2 \end{cases}$$

On en déduit les solutions :

$$Z_1 = 1 - 2i \quad \text{et} \quad Z_2 = -1 + 2i$$

Q 22 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - i\sqrt{3}z + i = 0$

► Réponse :

Le discriminant est :

$$\Delta = (-i\sqrt{3})^2 - 4 \times i = -3 - 4i = Z_0 = (Z_1)^2$$

Les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{i\sqrt{3} + Z_1}{2} = \frac{i\sqrt{3} + 1 - 2i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 2}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{i\sqrt{3} - Z_1}{2} = \frac{i\sqrt{3} - 1 + 2i}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

Q 23 En utilisant les résultats de Q 20 et Q 21, démontrer que : $\sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

► Réponse :

Avec les questions Q 20 et Q 21 on a deux expressions des racines carrées. Si on considère Z_2 , c'est à dire celle dans le « second » quadrant, on a :

$$Z_2 = -1 + 2i = \sqrt{5} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) \right)$$

En identifiant les parties réelles on obtient :

$$-1 = \sqrt{5} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) \implies \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Exercice IX (10 points)

On considère dans cet exercice la fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par : $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$.

Q 24 Déterminer la forme exponentielle de $f(1)$.

► Réponse :

On a :

$$f(1) = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\pi/4}}$$

Q 25 Déterminer la forme algébrique des éventuels antécédents de i .

► Réponse :

On résout l'équation :

$$f(z) = i \iff \frac{z-i}{z+1} = i \iff z-i = iz+i \iff z(1-i) = 2i \iff z = \frac{2i}{1-i}$$

Il reste à mettre sous forme algébrique :

$$z = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i+2i^2}{1+1} = \frac{2i-2}{2} = \boxed{-1+i}$$

Q 26 Déterminer la forme algébrique des éventuels points fixes de f (ce sont les z tels que $f(z) = z$).

► Réponse :

On résout l'équation :

$$f(z) = z \iff \frac{z-i}{z+1} = z \iff z-i = z^2+z \iff z^2 = -i$$

On utilise par exemple la forme exponentielle de $-i$: $-i = e^{-i\pi/2}$. Les solutions sont donc :

$$z_k = \pm e^{i(-\pi/4)} = \pm \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

On en déduit les formes algébriques :

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ fixé, on s'intéresse à l'équation

$$f(z)^n = 1 \quad (E)$$

Q 27 On introduit les points $A(i)$ et $B(-1)$. En utilisant le module, montrer que tous les points $M(z)$ où z est solution de l'équation (E) sont situés sur une droite que l'on déterminera.

► Réponse :

On a :

$$|f(z)|^n = |1| \iff |f(z)| = 1 \iff \left| \frac{z-i}{z+1} \right| = 1 \iff |z-i| = |z+1|$$

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-i| = |z+1|$ est la médiatrice du segment $[AB]$ où $A(-1)$ et $B(i)$.

Les solutions de l'équation (E) sont donc situées sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Q 28 On pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, montrer que les solutions de cette équation sont $z_k = \frac{\omega_k + i}{1 - \omega_k}$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

► Réponse :

On résout l'équation :

$$f(z)^n = 1 \iff \left(\frac{z-i}{z+1} \right)^n = 1 \iff \frac{z-i}{z+1} = \omega_k$$

avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (racines n -ième de l'unité). On a donc :

$$z - i = \omega_k(z + 1) \iff z - \omega_k z = i + \omega_k \iff z(1 - \omega_k) = i + \omega_k$$

Lorsque $k \neq 0, \omega_k \neq 1$, on peut alors diviser par $1 - \omega_k$ et on obtient :

$$z = \frac{\omega_k + i}{1 - \omega_k} \quad \text{avec } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Lorsque $k = 0$, on a $\omega_0 = 1$ et l'équation devient $z - i = z + 1 \iff i = 1$ qui n'a pas de solution.

Les solutions sont donc bien les $z_k = \frac{\omega_k + i}{1 - \omega_k}$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$.