Devoir surveillé N°4 (3h)

*L'usage de la calculatrice **N'est PAS autorisé**.*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Vous rendrez cette feuille recto-verso complétée (Exos I et II) pour récupérer la suite du sujet.
(Conseil : ne pas dépasser 30'...)

Exercice I (6 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en cochant la case correspondante.
Aucune justification n'est demandée.
Barème : +0,5 si juste, -0,5 si faux, 0 si pas de réponse.

	Vrai	Faux
a. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{ix} \in \mathbb{U}$ est injective.	☐	☐
b. La fonction $f : z \in \mathbb{C} \longrightarrow 3z - 2 \in \mathbb{C}$ est bijective	☐	☐
c. L'application $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto z^2 \in \mathbb{C}$ est surjective	☐	☐
d. Une application qui n'est pas injective est surjective	☐	☐
e. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $B \subset E$. On a toujours $f^{-1}[f(B)] = B$	☐	☐
f. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + ib = 0 \implies a = b = 0)$.	☐	☐
g. $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a + ib = 0 \implies a = b = 0)$	☐	☐
h. Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, alors z^n a pour argument $n + \arg(z)$	☐	☐
i. La valeur moyenne d'une fonction f définie sur $[a; b]$ est $\dfrac{f(a) + f(b)}{2}$	☐	☐
j. Les solutions de l'équation différentielles $y' + ay = 0$ sont les $y_h(x) = \lambda e^{ax}$	☐	☐
k. Les courbes représentant deux solutions distinctes d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ne peuvent pas se croiser	☐	☐
l. L'équation $y'' + ay' + by = 0$ pourrait ne pas admettre de solution réelle lorsque le discriminant de son équation caractéristique associée est négatif	☐	☐

Exercice II (4 points)

Dans chaque cas, déterminer et dessiner l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

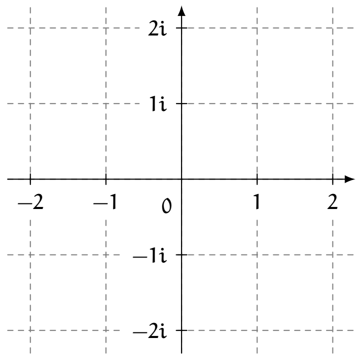
$\mathscr{E}_1 = \{M(z), |z + 2i| = |z - 2|\}$:

....

....

....

....



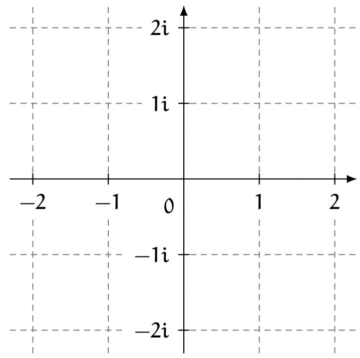
$\mathscr{E}_2 = \{M(z), |\overline{z} + i - 1| = 1\}$:

....

....

....

....



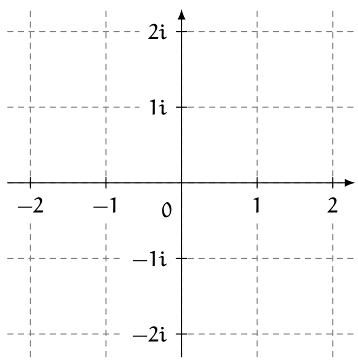
$\mathscr{E}_3 = \left\{M(z), \arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$:

....

....

....

....



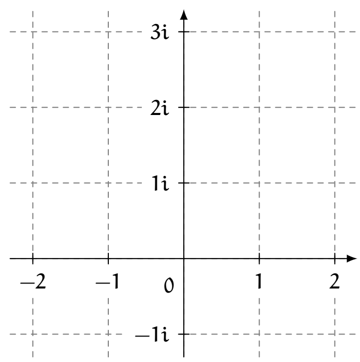
$\mathscr{E}_4 = \left\{M(z), \arg(\overline{z} + i) = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]\right\}$:

....

....

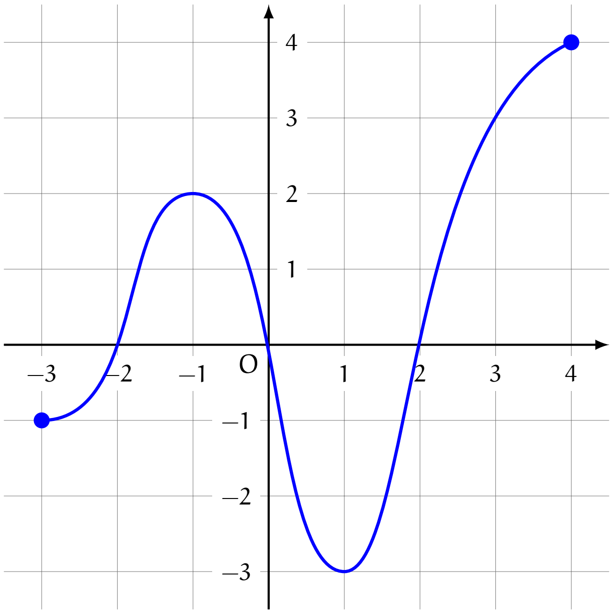
....

....



Exercice III (7 points)

On considère une fonction f définie sur $I = [-3; 4]$ par le graphique ci-dessous :



Q 1 Déterminer par lecture graphique les ensembles suivants :

a. $f([-3; 0])$ **b.** $f([0; 4])$ **c.** $f^{-1}([0; 3])$ **d.** $f^{-1}([3; 4])$ **e.** $f^{-1}(\mathbb{R})$

Q 2 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = [0; \pi]$ par $g(x) = 2\cos(x) + x$. Étudier les variations de la fonction g puis déterminer $g(I)$.

Q 3 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 - x^2$. Déterminer $h^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

Q 4 On considère alors la fonction $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$

Est-ce que k est injective ? Surjective ? Bijective ? (Justifier).

Exercice IV (7 points)

On considère l'équation différentielle : $(E)\ :\ y'' - 4y' + 5y = x$

Q 5 Résoudre l'équation homogène associée à (E).

Q 6 Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction affine.

Q 7 Donner toutes les solutions de l'équation (E).

Q 8 Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice V (6 points)

On souhaite dans cet exercice déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$(E_1) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x)$$

Q 9 Montrer que si f est solution de (E_1) alors nécessairement f est solution de :

$$(E_2) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f(x)$$

Q 10 Résoudre l'équation différentielle (E_2).

Q 11 Réciproquement, on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ avec A et B deux réels. Montrer que si f est solution de (E_1), alors $A = B$.

Q 12 Conclure sur l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).

Exercice VI (6 points)

Q 13 Déterminer la forme algébrique de $z_1 = \dfrac{3-2i}{3i-2}$.

Q 14 Déterminer la forme algébrique de $z_2 = 2i \times \dfrac{e^{i\pi/12}}{e^{i5\pi/12}}$

Q 15 Soit λ un réel. On considère les nombres complexes $z_3 = \dfrac{3\lambda^2 - i}{1-i}$ et $z_4 = 2+i$.
Déterminer les éventuels réels λ tels que $z_3 = z_4$.

Exercice VII (6 points)

Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ on pose $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

L'objectif est de montrer par trois méthodes différentes la propriété :

$$(P): \ |z| = 1 \implies f(z) \in i\mathbb{R}$$

Les trois questions sont indépendantes.

Q 16 *Méthode 1:* en utilisant la forme algébrique (on pose $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

Q 17 *Méthode 2:* en utilisant les conjugués *(et donc sans utiliser la forme algébrique).*

Q 18 *Méthode 3:* en utilisant la forme exponentielle (on pose $z = e^{i\theta}$ et on utilise la technique de l'arc moitié pour factoriser $1+z$ et $1-z$).

Exercice VIII (10 points)

On note $Z_0 = -3 - 4i$

Q 19 Déterminer le module et un argument de Z_0 *(on utilisera la fonction arctan pour l'argument).*

Q 20 On note Z_1 et Z_2 les racines carrées de Z_0. Déterminer la forme exponentielle de ces racines carrées.

Q 21 Sans utiliser la forme exponentielle, déterminer la forme algébrique des racines carrées de Z_0.

Q 22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - i\sqrt{3}z + i = 0$

Q 23 En utilisant les résultats de Q 20 et Q 21, démontrer que : $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercice IX (10 points)

On considère dans cet exercice la fonction f définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ par : $f(z) = \dfrac{z-i}{z+1}$.

Q 24 Déterminer la forme exponentielle de $f(1)$.

Q 25 Déterminer la forme algébrique des éventuels antécédents de i.

Q 26 Déterminer la forme algébrique des éventuels points fixes de f (ce sont les z tels que $f(z) = z$).

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ fixé, on s'intéresse à l'équation

$$f(z)^n = 1 \qquad (E)$$

Q 27 On introduit les points $A(i)$ et $B(-1)$. En utilisant le module, montrer que tous les points $M(z)$ où z est solution de l'équation (E) sont situées sur une droite que l'on déterminera.

Q 28 On pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, montrer que les solutions de cette équation sont $z_k = \dfrac{\omega_k + i}{1 - \omega_k}$ avec $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.