Devoir surveillé N°3 (2h)

L'usage de la calculatrice ***N'est PAS autorisé****.*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(2k - \frac{1}{2^k}\right)$.

Q 1 Calculer S_n.

▶ **Réponse :**

On coupe la somme en deux :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

La première somme est une somme de termes arithmétiques de raison 2 :

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = 2\sum_{k=0}^{n} k = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

La deuxième somme est une somme géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

On en déduit :

$$\boxed{S_n = n(n+1) - \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = n^2 + n - 2 + \frac{1}{2^n}}$$

Q 2 Écrire une fonction python `somme_S` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de S_n.

▶ **Réponse :**

```python
def somme_S(n):
    S = 0
    for k in range(0,n+1):
        S += 2*k - 1/(2**k)
    return S
```

Partie 2

On considère la somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{\ln(k) + \ln(n-k+1)}$.

Q 3 Effectuer le changement d'indice $k = n - i + 1$ pour obtenir une autre expression de T_n.

▶ **Réponse :**

En effectuant le changement d'indice $k = n - i + 1$, on a lorsque $k = 1$, $i = n$ et lorsque $k = n$, $i = 1$. Donc :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(n-i+1)}{\ln(n-i+1)+\ln(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n-k+1)}{\ln(n-k+1)+\ln(k)}$$

Q 4 En ajoutant les deux expressions de T_n, montrer que $T_n = \frac{n}{2}$.

▶ **Réponse :**

On peut alors ajouter l'expression de T_n obtenue à la question précédente avec celle de l'énoncé puisque les indices de sommation correspondent :

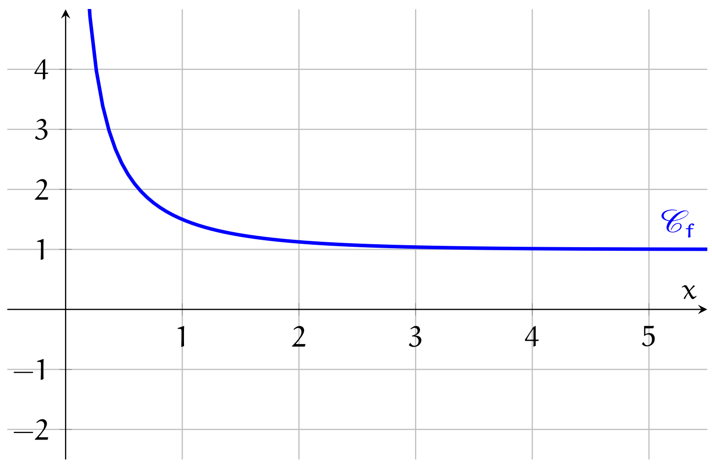
$$2T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(k)}{\ln(k)+\ln(n-k+1)} + \frac{\ln(n-k+1)}{\ln(n-k+1)+\ln(k)} \right) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Donc :

$$\boxed{T_n = \frac{n}{2}}$$

Exercice II

f est une fonction que l'on définit sur l'intervalle $I =]0; +\infty]$ par $f(x) = \frac{3^x}{3^x - 1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique que l'on donne ci-dessous :



Q 5 Calculer $f(\log_3 2)$.

▶ **Réponse :**

On a :

$$f(\log_3 2) = \frac{3^{\log_3 2}}{3^{\log_3 2} - 1} = \frac{2}{2-1} = \boxed{2}$$

Q 6 Montrer que f est strictement décroissante sur $I =]0; +\infty[$.

▶ **Réponse :**

Le conseil est de repasser par la notation avec l'exponentielle. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \frac{e^{x\ln(3)}}{e^{x\ln(3)} - 1}$$

On peut donc dériver avec les formules usuelles :

$$f'(x) = \frac{\ln(3)e^{x\ln(3)}(e^{x\ln(3)} - 1) - \ln(3)e^{x\ln(3)}e^{x\ln(3)}}{(e^{x\ln(3)} - 1)^2} = \frac{\ln(3)e^{x\ln(3)}(e^{x\ln(3)} - 1 - e^{x\ln(3)})}{(e^{x\ln(3)} - 1)^2}$$

Soit :

$$f'(x) = \frac{-\ln(3)e^{x\ln(3)}}{(e^{x\ln(3)} - 1)^2} = \frac{-\ln(3)3^x}{(3^x - 1)^2}$$

Or, pour tout $x \in I$, $3^x > 0$, $-\ln(3) < 0$ et $(3^x - 1)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{f est strictement décroissante sur I}}$.

Q 7 Déterminer (on attend un calcul...) les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}_f$.

▶ **Réponse :**

On cherche les limites aux bornes de l'intervalle I :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^x}{3^x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 0 \text{ est une asymptote verticale à la courbe } \mathscr{C}_f}$.
Ensuite :

$$f(x) = \frac{3^x}{3^x(1 - \frac{1}{3^x})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^x}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3^x}} = 1$$

Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 1 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe } \mathscr{C}_f}$.

Q 8 Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $\log_3 2$.

▶ **Réponse :**

On a déjà calculé $f(\log_3 2) = 2$. Il faut maintenant calculer $f'(\log_3 2)$:

$$f'(\log_3 2) = \frac{-\ln(3)3^{\log_3 2}}{(3^{\log_3 2} - 1)^2} = \frac{-\ln(3) \times 2}{(2-1)^2} = -2\ln(3)$$

L'équation de la tangente T au point $A(\log_3 2; 2)$ est donc :

$$y = f'(\log_3 2)(x - \log_3 2) + f(\log_3 2) \iff y = -2\ln(3)(x - \log_3 2) + 2$$

Soit :

$$\boxed{y = -2\ln(3)x + 2 + 2\ln(3)\log_3 2}$$

Q 9 Justifier que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

▶ **Réponse :**

Comme f est strictement décroissante sur I, elle réalise une bijection de I sur son image $J = f(I)$.
Il suffit donc de déterminer J en reprenant les limites calculées plus tôt aux bornes de I :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

Donc $\boxed{J =]1; +\infty[}$.

Q 10 Dire pourquoi f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(2)$.

▶ **Réponse :**

La fonction f est bijective de I vers J, elle est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.
Donc, d'après le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J =]1;+\infty[}$.
Pour calculer $(f^{-1})'(2)$, il faut d'abord trouver $f^{-1}(2)$. Or, d'après la question 5, $f(\log_3 2) = 2$ donc $f^{-1}(2) = \log_3 2$.
Ensuite, on utilise la formule :

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Donc :

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(\log_3 2)} = \frac{1}{-2\ln(3)} = \boxed{-\frac{1}{2\ln(3)}}$$

Q 11 Montrer que pour tout $y \in J$ on a $f^{-1}(y) = \log_3(y) - \log_3(y-1)$. (*On prendra soin aux ensembles de définition.*)

▶ **Réponse :**

Soit $y \in J =]1;+\infty[$. Par définition de la fonction réciproque, on a :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

$$\text{Or, } f(x) = y \iff \frac{3^x}{3^x - 1} = y \iff 3^x = y(3^x - 1) \iff 3^x - y3^x = -y \iff 3^x(1-y) = -y$$

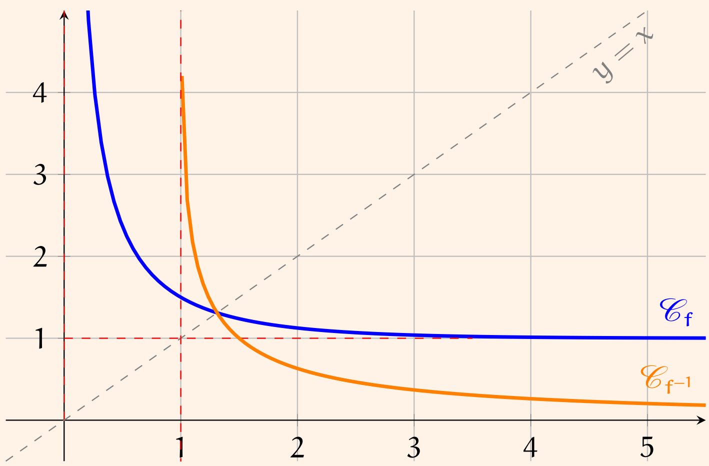
$$\iff 3^x = \frac{y}{y-1} \quad (\text{car } y > 1) \iff x = \log_3\left(\frac{y}{y-1}\right) = \log_3(y) - \log_3(y-1)$$

Donc :

$$\boxed{f^{-1}(y) = \log_3(y) - \log_3(y-1)}$$

Q 12 Sur le graphique ci-dessus, faire un croquis propre de la représentation graphique de f^{-1} en faisant bien apparaître l'axe de symétrie entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.

▶ **Réponse :**



Exercice III

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$.

Q 13 Déterminer son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

▶ **Réponse :**

La fonction f est définie lorsque le dénominateur est non nul :

$$2 + \cos(x) \neq 0 \iff \cos(x) \neq -2$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1; 1]$ donc $\cos(x) \neq -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$.

Q 14 Montrer que f est 2π-périodique.
Cela permet de réduire l'étude sur un intervalle I_1 d'amplitude 2π. Préciser par quelle opération géométrique on retrouvera l'intégralité de la courbe.

▶ **Réponse :**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} = f(x)$$

Donc $\boxed{\text{f est } 2\pi\text{-périodique}}$.
On peut donc réduire l'étude de f sur un intervalle I_1 d'amplitude 2π.
La courbe complète de f s'obtient par $\boxed{\text{translation horizontale de vecteur } 2k\pi\vec{i}}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Q 15 Étudier la parité de f et en déduire qu'il suffit alors d'étudier f sur un intervalle I_2 que l'on précisera. Par quelle opération géométrique on retrouvera l'intégralité de la courbe ?

▶ **Réponse :**

L'ensemble de définition de f est bien symétrique par rapport à 0. Étudions donc $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$$

Donc $\boxed{\text{f est une fonction impaire}}$.
On peut donc réduire l'étude de f sur un intervalle symétrique par rapport à 0. On prendra $I_2 = [0; \pi]$
La courbe complète de f s'obtient par $\boxed{\text{symétrie centrale par rapport à l'origine}}$.

Q 16 Justifier que f est dérivable sur $I = [0; \pi]$ et montrer que : $\forall x \in I$, $f'(x) = \dfrac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}$.

▶ **Réponse :**

La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur I, donc elle est dérivable là où elle est définie, donc sur I.
Pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}$$

Q 17 Remplir le tableau de variation de la fonction f sur I.

▶ **Réponse :**

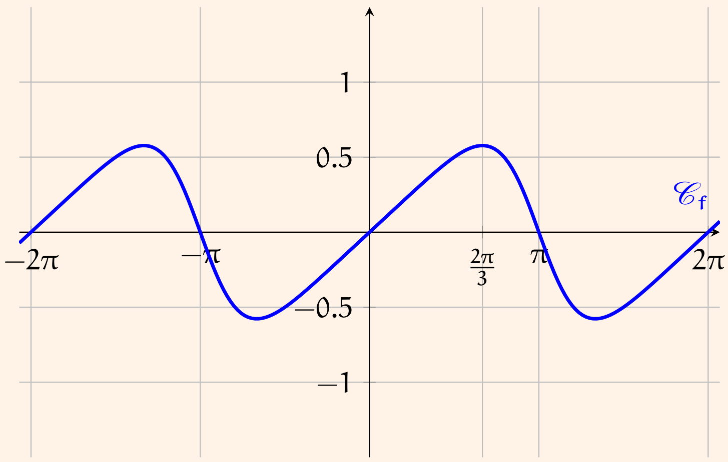
On étudie le signe de $f'(x)$ sur I :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 2\cos(x) + 1 \geqslant 0 \iff \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Q 18 Tracer soigneusement la courbe représentative de f sur I, puis compléter la courbe sur $\mathbb{R}$ *(On n'oubliera pas de placer les tangentes horizontales...).*

▶ **Réponse :**



Exercice IV

Q 19 Pour chaque fonction arccos, arcsin et arctan, donner son ensemble de définition ainsi que son intervalle image.

▶ **Réponse :**

- arccos : $\mathscr{D}_{\text{arccos}} = [-1;1]$ et $\text{Im}(\text{arccos}) = [0;\pi]$
- arcsin : $\mathscr{D}_{\text{arcsin}} = [-1;1]$ et $\text{Im}(\text{arcsin}) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
- arctan : $\mathscr{D}_{\text{arctan}} = \mathbb{R}$ et $\text{Im}(\text{arctan}) = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Q 20 Donner l'ensemble de dérivabilité ainsi que les dérivées des fonctions arccos, arcsin et arctan.

▶ **Réponse :**

- $\forall x \in]-1;1[$, $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in]-1;1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Q 21 On découpe l'intervalle $]-\pi;2\pi]$ suivant les 6 sous-intervalles suivants :

$$I_1 = \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right] \quad I_2 = \left]-\frac{\pi}{2};0\right] \quad I_3 = \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \quad I_4 = \left]\frac{\pi}{2};\pi\right] \quad I_5 = \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right] \quad I_6 = \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$$

On considère également les nombres réels suivants :

$$a = \arccos\left(\frac{-2}{3}\right) \quad b = \arcsin\left(\frac{-3}{4}\right) \quad c = \arccos\left(\frac{1}{7}\right) \quad d = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) \quad e = \arctan\left(\frac{-4}{5}\right) \quad f = \arctan\left(\frac{8}{5}\right)$$

Classer les nombres a, b, c, d, e et f dans les intervalles I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 et I_6.

▶ **Réponse :**

- $a \in I_4$ car $\dfrac{-2}{3} \in [-1;0]$ donc $\arccos\left(\dfrac{-2}{3}\right) \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$
- $b \in I_2$ car $\dfrac{-3}{4} \in [-1;0]$ donc $\arcsin\left(\dfrac{-3}{4}\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$
- $c \in I_3$ car $\dfrac{1}{7} \in [0;1]$ donc $\arccos\left(\dfrac{1}{7}\right) \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
- $d \in I_3$ car $\dfrac{1}{5} \in [0;1]$ donc $\arcsin\left(\dfrac{1}{5}\right) \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
- $e \in I_2$ car $\dfrac{-4}{5} < 0$ donc $\arctan\left(\dfrac{-4}{5}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$
- $f \in I_3$ car $\dfrac{8}{5} > 0$ donc $\arctan\left(\dfrac{8}{5}\right) \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Q 22 Simplifier les expressions suivantes :

$$x_1 = \arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right) \quad x_2 = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right) \quad x_3 = \arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right)$$

▶ **Réponse :**

- $x_1 = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)\right) = \dfrac{3\pi}{5}$ car $\dfrac{3\pi}{5} \in [0;\pi]$
- $x_2 = \arcsin\left(\sin\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right)\right) = -\dfrac{2\pi}{5}$ car $-\dfrac{2\pi}{5} \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
- $x_3 = \arctan\left(\tan\left(\dfrac{11\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\dfrac{11\pi}{5}-\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right) = \dfrac{\pi}{5}$ car $\dfrac{\pi}{5} \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Q 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = -\dfrac{1}{5}$, puis donner les solutions dans $[0;2\pi[$.

▶ **Réponse :**

$$\cos(x) = -\frac{1}{5} \iff \cos(x) = \cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$$

D'ou les solutions :

$$x = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Dans $[0; 2\pi[$, on a donc les solutions :

$$x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$$

Q 24 ★ On considère l'intervalle $I =]-1; 1[$.

On définit sur I les deux fonctions $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ et $g(x) = 2\arctan(x)$.

On admettra que pour tout $x \in I$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \in]-1; 1[$.

Montrer que la fonction h définie sur I par $h(x) = f(x) - g(x)$ est une fonction constante, puis déterminer sa valeur.

▶ **Réponse :**

Pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \times \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \times \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Soit :

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \times \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

Ensuite, pour tout $x \in I$, on a :

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

Donc, pour tout $x \in I$, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.
Ainsi, $\boxed{h \text{ est une fonction constante sur } I}$.
Pour déterminer la valeur de cette constante, on calcule $h(0)$:

$$h(0) = f(0) - g(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(0) = 0 - 0 = 0$$

Donc $\boxed{h(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I}$, soit $\boxed{f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in I}$.

Hors barème :

Exercice V

Q 25 Étudier proprement la fonction $u(x) = x\ln(x) + (x-1)\ln(1-x)$.