

# DEVOIR SURVEILLÉ N°3 (2H)

*L'usage de la calculatrice N'est PAS autorisé.*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Exercice I

Les deux parties sont indépendantes.

### Partie 1

On considère la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n \left( 2k - \frac{1}{2^k} \right)$ .

**Q1** Calculer  $S_n$ .

**Q2** Écrire une fonction python `somme_S` qui prend en argument un entier  $n$  et qui renvoie la valeur de  $S_n$ .

### Partie 2

On considère la somme  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{\ln(k) + \ln(n-k+1)}$ .

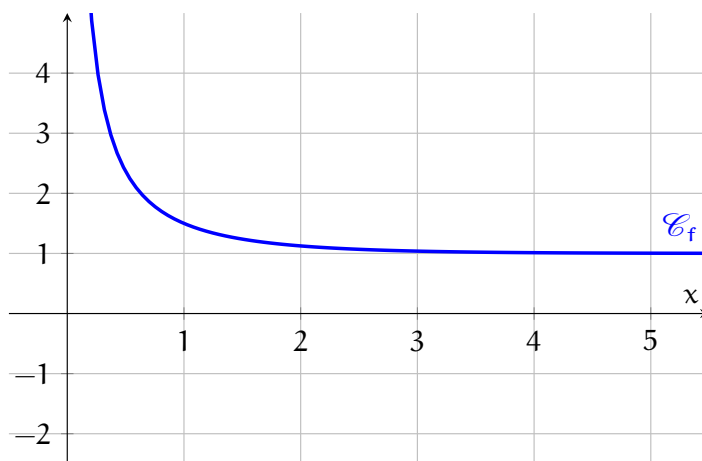
**Q3** Effectuer le changement d'indice  $k = n - i + 1$  pour obtenir une autre expression de  $T_n$ .

**Q4** En ajoutant les deux expressions de  $T_n$ , montrer que  $T_n = \frac{n}{2}$ .

## Exercice II

$f$  est une fonction que l'on définit sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty]$  par  $f(x) = \frac{3^x}{3^x - 1}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa représentation graphique que l'on donne ci-dessous :



**Q5** Calculer  $f(\log_3 2)$ .

**Q6** Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $I = ]0; +\infty[$ .

**Q7** Déterminer (on attend un calcul...) les asymptotes éventuelles à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Q8** Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse  $\log_3 2$ .

**Q9** Justifier que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.

**Q10** Dire pourquoi  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et calculer  $(f^{-1})'(2)$ .

**Q11** Montrer que pour tout  $y \in J$  on a  $f^{-1}(y) = \log_3(y) - \log_3(y-1)$ . (On prendra soin aux ensembles de définition.)

**Q12** Sur le graphique ci-dessus, faire un croquis propre de la représentation graphique de  $f^{-1}$  en faisant bien apparaître l'axe de symétrie entre les deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ .

**Exercice III**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$ .

**Q 13** Déterminer son ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ .

**Q 14** Montrer que  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

Cela permet de réduire l'étude sur un intervalle  $I_1$  d'amplitude  $2\pi$ . Préciser par quelle opération géométrique on retrouvera l'intégralité de la courbe.

**Q 15** Étudier la parité de  $f$  et en déduire qu'il suffit alors d'étudier  $f$  sur un intervalle  $I_2$  que l'on précisera. Par quelle opération géométrique on retrouvera l'intégralité de la courbe ?

**Q 16** Justifier que  $f$  est dérivable sur  $I = [0; \pi]$  et montrer que :  $\forall x \in I, f'(x) = \frac{2 \cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}$ .

**Q 17** Remplir le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $I$ .

**Q 18** Tracer soigneusement la courbe représentative de  $f$  sur  $I$ , puis compléter la courbe sur  $\mathbb{R}$  (*On n'oubliera pas de placer les tangentes horizontales...*).

**Exercice IV**

**Q 19** Pour chaque fonction arccos, arcsin et arctan, donner son ensemble de définition ainsi que son intervalle image.

**Q 20** Donner l'ensemble de dérivabilité ainsi que les dérivées des fonctions arccos, arcsin et arctan.

**Q 21** On découpe l'intervalle  $]-\pi; 2\pi]$  suivant les 6 sous-intervalles suivants :

$$I_1 = ]-\pi; -\frac{\pi}{2}] \quad I_2 = ]-\frac{\pi}{2}; 0] \quad I_3 = ]0; \frac{\pi}{2}] \quad I_4 = ]\frac{\pi}{2}; \pi] \quad I_5 = ]\pi; \frac{3\pi}{2}] \quad I_6 = ]\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$$

On considère également les nombres réels suivants :

$$a = \arccos\left(\frac{-2}{3}\right) \quad b = \arcsin\left(\frac{-3}{4}\right) \quad c = \arccos\left(\frac{1}{7}\right) \quad d = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) \quad e = \arctan\left(\frac{-4}{5}\right) \quad f = \arctan\left(\frac{8}{5}\right)$$

Classer les nombres  $a, b, c, d, e$  et  $f$  dans les intervalles  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  et  $I_6$ .

**Q 22** Simplifier les expressions suivantes :

$$x_1 = \arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right) \quad x_2 = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right) \quad x_3 = \arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right)$$

**Q 23** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(x) = -\frac{1}{5}$ , puis donner les solutions dans  $[0; 2\pi[$ .

**Q 24** ★ On considère l'intervalle  $I = ]-1; 1[$ .

On définit sur  $I$  les deux fonctions  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  et  $g(x) = 2 \arctan(x)$ .

On admettra que pour tout  $x \in I, \frac{2x}{1+x^2} \in ]-1; 1[$ .

Montrer que la fonction  $h$  définie sur  $I$  par  $h(x) = f(x) - g(x)$  est une fonction constante, puis déterminer sa valeur.

\_\_\_\_\_ Hors barème :

**Exercice V**

**Q 25** Étudier proprement la fonction  $u(x) = x \ln(x) + (x-1) \ln(1-x)$ .