Devoir surveillé N°2 (2h)

*L'usage de la calculatrice **est autorisé**.*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part très importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I

On considère la suite définie par récurrence sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

Q 1 Vérifier que $u_3 = \dfrac{1}{4}$ et que $u_4 = \dfrac{1}{5}$.

> ▶ **Réponse :**
>
> On calcule successivement :
>
> $$u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
>
> $$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$
>
> $$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$
>
> $$u_4 = \frac{u_3}{1+u_3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$$
>
> On a bien : $\boxed{u_3 = \dfrac{1}{4} \text{ et } u_4 = \dfrac{1}{5}}$.

Q 2 On considère la fonction python `liste(k : int)->list` qui reçoit un entier naturel k et qui renvoie la liste des valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.
Écrire sur votre copie les bouts de code à mettre dans les cases $\boxed{\text{Zone 1 à 4}}$.

```python
def liste(k : int) -> float:
    """ Renvoie la liste des u_n pour n=0 à n=k """
    L = [ Zone 1 ]
    n = 0 # Pour cette suite en particulier il n'y en a pas besoin...
    for _ in range( Zone 2 ):
        last = L[-1]
        L.append( Zone 3 )
        n += 1
    return Zone 4
```

> ▶ **Réponse :**
>
> - $\boxed{\text{Zone 1}}$: `1` (car $u_0 = 1$)
> - $\boxed{\text{Zone 2}}$: `k` (on veut calculer k termes supplémentaires)
> - $\boxed{\text{Zone 3}}$: `last / (1 + last)` (c'est la formule de récurrence)
> - $\boxed{\text{Zone 4}}$: `L`

Q 3 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

▶ **Réponse :**

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 1 = \frac{1}{0+1}$.
Hérédité : On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a $u_k = \frac{1}{k+1}$.
On doit montrer que $u_{k+1} = \frac{1}{k+2}$.
En effet, par définition de la suite et grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k+1}} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{1}{k+2}.$$

Conclusion : on a initialisé à $n = 0$ et on a montré l'hérédité pour tout $n \geqslant 0$. Alors par le principe de récurrence, on a donc bien pour tout $\boxed{n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{n+1}}$.

Exercice II

Dans un repère orthonormé on considère les points $K(2;1)$, $L(1;4)$ et $M(5;4)$.
Le but de l'exercice est de trouver une équation cartésienne du cercle circonscrit à ces 3 points. On rappelle que le centre de ce cercle se situe à l'intersection des médiatrices des côtés du triangle KLM.

Q 4 Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [KL].

▶ **Réponse :**

Pour obtenir le milieu on fait la moyenne des coordonnées :

$$I\left(\frac{2+1}{2}; \frac{1+4}{2}\right) \text{ donc } \boxed{I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)}$$

Q 5 On définit la droite $\mathscr{D}_1$ par l'équation : $x - 3y + 6 = 0$. Montrer que $\mathscr{D}_1$ est la médiatrice de [KL].

▶ **Réponse :**

On commence par vérifier que I appartient à $\mathscr{D}_1$:

$$\frac{3}{2} - 3 \times \frac{5}{2} + 6 = \frac{3 - 15 + 12}{2} = 0$$

Donc $I \in \mathscr{D}_1$.
Ensuite, on calcule un vecteur directeur de la droite (KL) :

$$\text{Coord}_{\overrightarrow{KL}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est bien colinéaire au vecteur normal de $\mathscr{D}_1$ qui est $\vec{n} = \binom{1}{-3}$ car :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc $(KL) \perp \mathscr{D}_1$.
On en déduit que $\boxed{\mathscr{D}_1 \text{ est bien la médiatrice de } [KL]}$.

Q 6 Déterminer une équation de la médiatrice $\mathscr{D}_2$ du segment [LM].

▶ **Réponse :**

On peut utiliser la même méthode que précédemment.

Le milieu J de [LM] est :

$$J\left(\frac{1+5}{2};\frac{4+4}{2}\right) \text{ donc } J(3;4).$$

On peut remarquer que le segment [LM] est horizontal, donc sa médiatrice est verticale.
Une équation de la droite $\mathscr{D}_2$ est donc :

$$x = x_J \iff \boxed{\mathscr{D}_2 : x = 3}$$

Q 7 En déduire le centre, le rayon et une équation cartésienne du cercle passant par K, L et M.

▶ **Réponse :**

Le centre O du cercle circonscrit est l'intersection des médiatrices $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
En remplaçant $x = 3$ dans l'équation de $\mathscr{D}_1$, on trouve :

$$3 - 3y + 6 = 0 \iff y = 3.$$

Donc $\boxed{O(3;3)}$.
Le rayon R est la distance entre O et l'un des points, par exemple K :

$$R = OK = \sqrt{(3-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}.$$

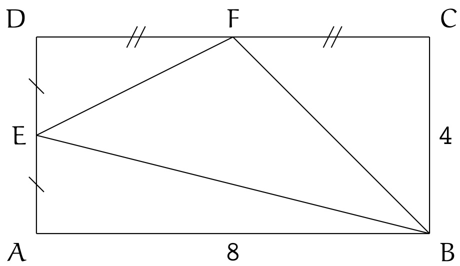
Une équation cartésienne du cercle est donc :

$$\boxed{(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5}$$

Exercice III

ABCD est un rectangle de longueur 8 et de largeur 4. E est le milieu de [AD] et F celui de [DC].

Q 8 Donner (sans justification) les valeurs exactes des produits scalaires suivants :



- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BE} = -64$

- $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$
- $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DF} = 32$
- $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} = 28$

On considère pour la suite de l'exercice le repère **non orthonormé** $\mathscr{R} = \left(E; \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}\right)$.

Q 9 Donner dans $\mathscr{R}$ les coordonnées des points B et F puis déterminer une équation paramétrique de la droite (FB).

▶ **Réponse :**

Dans le repère $\mathscr{R}$, on a $\boxed{B(1,0) \text{ et } F(0,1)}$.
On a de même $\overrightarrow{FB}\binom{1}{-1}$. On déduit alors une équation paramétrique de la droite (FB) est :

$$\boxed{(FB) : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.}$$

Exercice IV

Dans un repère orthonormé, on considère trois points $A(1;2)$, $B(5;4)$ et $C(1;3)$.

Q 10 Montrer qu'une équation cartésienne de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient orthogonaux est : $x^2 - 6x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

▶ **Réponse :**

Soit $M(x, y)$ un point quelconque. On a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-5 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0 \iff (x-1)(x-5) + (y-2)(y-4) = 0$$

En développant et en simplifiant, on obtient bien l'équation proposée :

$$x^2 - 6x + y^2 - 6y + 13 = 0.$$

Q 11 Reconnaitre cet ensemble $\mathscr{E}$ et en donner ses éléments caractéristiques.

▶ **Réponse :**

L'équation peut se mettre sous la forme :

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{5}^2$$

Il s'agit donc d'un $\boxed{\text{cercle de centre } I(3;3) \text{ et de rayon } R = \sqrt{5}}$.

Q 12 Déterminer si le point C appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

▶ **Réponse :**

On peut simplement remplacer les coordonnées de C dans l'équation de $\mathscr{E}$:

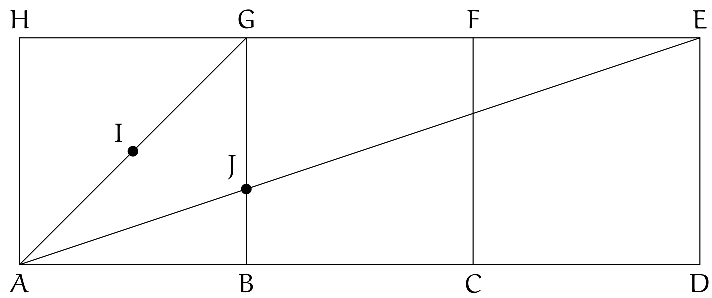
$$1^2 - 6 \times 1 + 3^2 - 6 \times 3 + 13 = 1 - 6 + 9 - 18 + 13 = -1 \neq 0$$

Donc $\boxed{C \notin \mathscr{E}}$.

Remarque : on aurait aussi pu calculer les produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ et vérifier qu'il n'est pas nul.

Exercice V

Sur la figure suivante, les trois carrés $ABGH$, $BCFG$ et $CDEF$ ont pour côté 1. Le point I est le milieu du segment $[AG]$ et J est le point d'intersection des droites (AE) et (BG).



Partie 1 : SANS repère

Q 13 En utilisant la relation de Chasles et le point H, calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE}$.

▶ **Réponse :**

On utilise la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE}) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{HE}\end{aligned}$$

Or, on a les orthogonalités suivantes :

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HE}, \quad \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HG}$$

Donc :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = AH^2 + HG \cdot HE = 1^2 + 1 \times 3 = 4.$$

On a donc : $\boxed{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = 4}$.

Q 14 En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}}\right)$ ainsi qu'une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{EAG}$.

▶ **Réponse :**

On utilise la formule du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = AG \times AE \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}}\right)$$

Or, on a :

$$AG = \sqrt{AH^2 + HG^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

et

$$AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Donc :

$$4 = \sqrt{20} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}}\right) \iff \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit une valeur approchée de l'angle :

$$\widehat{EAG} \approx 26,57°.$$

On a donc : $\boxed{\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ et } \widehat{EAG} \approx 26,57°}$.

Partie 2 : AVEC repère

Dans cette partie on introduit le repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right)$.

On admettra que le point J a pour coordonnées $J\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

Q 15 Déterminer les coordonnées du point I.

▶ **Réponse :**

Le point I est le milieu de $[AG]$. On a donc :

$$I\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \text{ donc } \boxed{I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}.$$

Q 16 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JC}$.

▶ **Réponse :**

On a :

$$\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Q 17 En expliquant votre démarche, dire si les points I, J et C sont alignés ?

▶ **Réponse :**

On peut vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont colinéaires en calculant le déterminant :

$$\det(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{JC}) = -\mathrm{dfrac16} + \frac{1}{6} = 0$$

Donc $\boxed{\text{les points I, J et C sont alignés}}$.

Q 18 Déterminer par la méthode de votre choix, une équation cartésienne de la droite (JC).

▶ **Réponse :**

On utilise la méthode avec le vecteur normal. Un vecteur normal à la droite (JC) est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc une équation cartésienne de la droite (JC) est :

$$\frac{1}{3}(x - x_C) + 1(y - y_C) = 0 \iff (x-2) + 3(y-0) = 0.$$

On a donc : $\boxed{(JC) : x + 3y - 2 = 0}$.

Q 19 Retrouver votre réponse à la question Q 17 en utilisant l'équation de la droite (JC).

▶ **Réponse :**

On remplace les coordonnées de I dans l'équation de la droite :

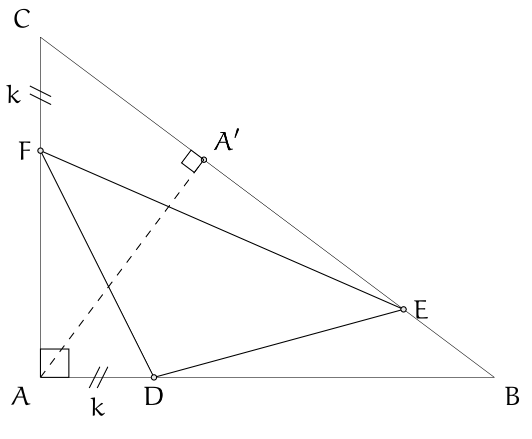
$$\frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} - 2 = 0$$

Donc $\boxed{I \in (JC)}$, ce qui confirme que les points I, J et C sont alignés.

Exercice VI

Dans cet exerccie, $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé, et k un réel dans l'intervalle $[0; 3]$. On considère :

- Les points $B(4;0)$, $C(0;3)$ et $D(k,0)$,
- Le F est placé sur le segment $[CA]$ tels que $CF = k = AD$,
- Le point E est le barycentre des points $(B, 5-k)$ et (C, k).
- A' le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



Q 20 Donner en fonction de k les coordonnées du point F et vérifier que l'on a : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} -k \\ 3-k \end{pmatrix}$

▶ **Réponse :**

On a $F(0; 3-k)$, et donc

$$\mathrm{Coord}_{\mathrm{VDF}} = \begin{pmatrix} 0-k \\ 3-k-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 3-k \end{pmatrix}.$$

Q 21 Montrer que le point E a pour coordonnées $\left(4-\dfrac{4k}{5}, \dfrac{3k}{5}\right)$.

▶ **Réponse :**

On utilise la formule du barycentre, c'est à dire que l'on fait la moyenne coefficientée des coordonnées :

$$E\left(\frac{(5-k)\times 4 + k\times 0}{5-k+k}, \frac{(5-k)\times 0 + k\times 3}{5-k+k}\right) = \boxed{E\left(4-\frac{4k}{5}, \frac{3k}{5}\right)}$$

Q 22 Vérifier que $BE = k$.

▶ **Réponse :**

On calcule la distance BE^2 :

$$\begin{aligned} BE^2 &= \left(4-\frac{4k}{5}-4\right)^2 + \left(\frac{3k}{5}-0\right)^2 \\ &= \left(-\frac{4k}{5}\right)^2 + \left(\frac{3k}{5}\right)^2 = \frac{16k^2}{25} + \frac{9k^2}{25} = \frac{25k^2}{25} = k^2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{BE = k}$.

Q 23 Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ vérifient : $5\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}20-9k\\3k\end{pmatrix}$.

▶ **Réponse :**

On a :

$$\mathrm{Coord}_{\overrightarrow{DE}} = \begin{pmatrix}4-\dfrac{4k}{5}-k\\ \dfrac{3k}{5}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-\dfrac{9k}{5}\\ \dfrac{3k}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}20-9k\\3k\end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\boxed{5\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}20-9k\\3k\end{pmatrix}}.$$

Q 24 Déterminer les valeurs éventuelles de k telles que le triangle DEF soit rectangle en D.

▶ **Réponse :**

Le triangle DEF est rectangle en D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux. Cherchons donc les valeurs de k telles que :

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = 0.$$

En utilisant les expressions trouvées précédemment, on a :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}20-9k\\3k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-k\\3-k\end{pmatrix} = 0 \iff (20-9k)(-k)+3k(3-k) = 0$$

En développant et en simplifiant, on obtient l'équation :

$$-20k+9k^2+9k-3k^2 = 0 \iff 6k^2-11k = 0 \iff k(6k-11) = 0.$$

Or, k est dans l'intervalle $[0;3]$, donc il y a deux solutions possibles : $\boxed{k = 0 \text{ ou } k = \dfrac{11}{6}}$.

On remarque que si $k = 0$ le triangle DEF coincide avec le triangle ABC.

Q 25 Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite (BC) ainsi qu'une équation cartésienne de cette droite.

▶ **Réponse :**

On a :

$$\mathrm{Coord}_{\overrightarrow{BC}} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc un vecteur normal à la droite (BC) est :

$$C_o rd_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne de la droite (BC) est donc :

$$3(x-4) + 4(y-0) = 0 \iff \boxed{(BC) : 3x + 4y - 12 = 0}.$$

Q 26 Sans calculer les coordonnées du point A', déterminer la longueur AA' *(On pourra utiliser au choix une méthode utilisant un calcul de distance ou une méthode utilisant des calculs d'aire...)*

▶ **Réponse :**

Méthode 1 (distance) :
La distance entre le point $A(0;0)$ et la droite (BC) est donnée par la formule :

$$\mathrm{dist}(A, BC) = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \boxed{\frac{12}{5} = AA'}$$

Méthode 2 (aire) :
On utilise la formule de l'aire du triangle :

$$\mathrm{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6.$$

On a aussi :

$$\mathrm{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AA' = \frac{1}{2} \times 5 \times AA' = \frac{5}{2}AA'.$$

Donc en égalisant les deux expressions de l'aire, on obtient :

$$6 = \frac{5}{2}AA' \iff \boxed{AA' = \frac{12}{5}}.$$

Q 27 Déterminer les coordonnées du point A', puis retrouver le résultat de la question précédente Q 26.

▶ **Réponse :**

Le point $A'(x_{A'}, y_{A'})$ est déterminé par les relations :

$$\begin{cases} A' \in (BC) \\ \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

D'une part on utilise l'équation de la droite (BC) pour déterminer les coordonnées de A'. On a :

$$3x_{A'} + 4y_{A'} - 12 = 0 \quad (i)$$

D'autre part, on utilise la condition de perpendicularité :

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff \begin{pmatrix} x_{A'} - 0 \\ y_{A'} - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \iff -4x_{A'} + 3y_{A'} = 0 \quad (ii).$$

Il reste à résoudre le système (i) et (ii). En faisant $4(i) + 3(ii)$, on obtient $y = \frac{48}{25}$. En remplaçant dans (ii), on trouve $x = \frac{36}{25}$.

Donc $\boxed{A'\left(\frac{36}{25};\frac{48}{25}\right)}$.

On peut vérifier la distance AA' :

$$AA' = \sqrt{\left(\frac{36}{25}-0\right)^2+\left(\frac{48}{25}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{1296}{625}+\frac{2304}{625}} = \sqrt{\frac{3600}{625}} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5}.$$

On retrouve bien le résultat de la question Q 26.

Q 28 Déterminer l'aire du triangle DEF en fonction de k *(On rappelle que l'aire de ce triangle vaut* $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)\right|$*)*

▶ **Réponse :**

On utilise la formule de l'aire :

$$\text{Aire}(DEF) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)\right|$$

En utilisant les expressions trouvées précédemment, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}20-9k\\3k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-k\\3-k\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left((20-9k)(3-k)+3k^2\right)$$

En développant et en simplifiant, on obtient :

$$(20-9k)(3-k)+3k^2 = 60-20k-27k+9k^2+3k^2 = 12k^2-47k+60.$$

Donc :

$$\text{Aire}(DEF) = \frac{1}{10}|12k^2-47k+60|.$$

On remarque que pour $k \in [0;3]$, on a toujours $12k^2-47k+60 > 0$ (Le discriminant Δ est strictement négatif). Donc :

$$\boxed{\text{Aire}(DEF) = \frac{1}{10}(12k^2-47k+60)}.$$

Q 29 Déterminer enfin pour quelle(s) valeur(s) de k l'aire du triangle DEF est minimale.

▶ **Réponse :**

L'aire est minimale lorsque la fonction $f(k) = 12k^2-47k+60$ est minimale.
Le coefficient dominant est positif, donc la parabole est tournée vers le haut, et la fonction admet un minimum pour $k_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{47}{2\times 12} = \frac{47}{24} \approx 1,96 \in [0;3]$.

Donc la valeur de k pour laquelle l'aire du triangle DEF est minimale est : $\boxed{k = \frac{47}{24}}$.

Remarque : c'est presque le milieu de [AB].