Devoir surveillé N°2 (2h)

L'usage de la calculatrice ***est autorisé.***

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part très importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I (6 points)

On considère la suite définie par récurrence sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

Q 1 Vérifier que $u_3 = \dfrac{1}{4}$ et que $u_4 = \dfrac{1}{5}$.

Q 2 On considère la fonction python `liste(k : int)->list` qui reçoit un entier naturel k et qui renvoie la liste des valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
def liste(k : int) -> float:
    """ Renvoie la liste des u_n pour n=0 à n=k """
    L = [ ▭ ]
    n = 0 # Pour cette suite en particulier il n'y en a pas besoin...
    for _ in range( ▭ ):
        last = L[-1]
        L.append( ▭ )
        n += 1
    return ▭
```

Q 3 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice II (7 points)

Dans un repère orthonormé on considère les points $K(2;1)$, $L(1;4)$ et $M(5;4)$.
Le but de l'exercice est de trouver une équation cartésienne du cercle circonscrit à ces 3 points. On rappelle que le centre de ce cercle se situe à l'intersection des médiatrices des côtés du triangle KLM.

Q 4 Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [KL].

Q 5 On définit la droite $\mathscr{D}_1$ par l'équation : $x - 3y + 6 = 0$. Montrer que $\mathscr{D}_1$ est la médiatrice de [KL].

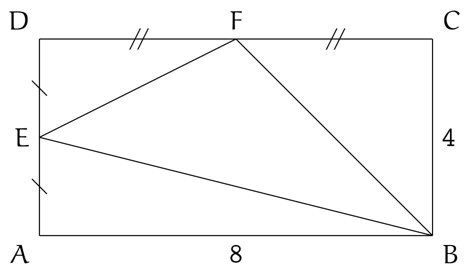
Q 6 Déterminer une équation de la médiatrice $\mathscr{D}_2$ du segment [LM].

Q 7 En déduire le centre, le rayon et une équation cartésienne du cercle passant par K, L et M.

Exercice III (4 points)

ABCD est un rectangle de longueur 8 et de largeur 4. E est le milieu de [AD] et F celui de [DC].

Q 8 Donner (sans justification) les valeurs exactes des produits scalaires suivants :



- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \ .....$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CF} = \ .....$
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BE} = \ .....$
- $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BC} = \ .....$
- $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DF} = \ .....$
- $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} = \ .....$

On considère pour la suite de l'exercice le repère **non orthonormé** $\mathscr{R} = \left(E; \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}\right)$.

Q 9 Donner dans $\mathscr{R}$ les coordonnées des points B et F puis déterminer une équation paramétrique de la droite (FB).

Exercice IV (6 points)

Dans un repère orthonormé, on considère trois points $A(1;2)$, $B(5;4)$ et $C(1;3)$.

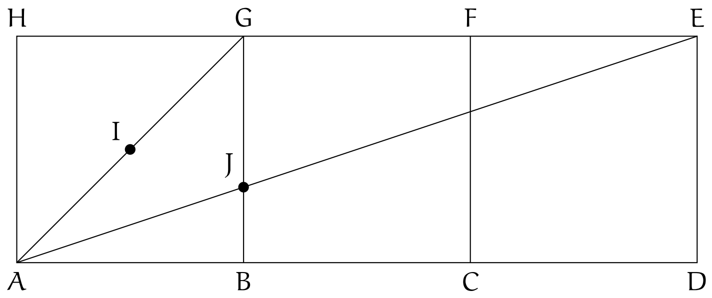
Q 10 Montrer qu'une équation cartésienne de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient orthogonaux est : $x^2 - 6x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

Q 11 Reconnaitre cet ensemble $\mathscr{E}$ et en donner ses éléments caractéristiques.

Q 12 Déterminer si le point C appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice V (11 points)

Sur la figure suivante, les trois carrés $ABGH$, $BCFG$ et $CDEF$ ont pour côté 1. Le point I est le milieu du segment $[AG]$ et J est le point d'intersection des droites (AE) et (BG).



Partie 1 : SANS repère

Q 13 En utilisant la relation de Chasles et le point H, calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE}$.

Q 14 En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}}\right)$ ainsi qu'une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{EAG}$.

Partie 2 : AVEC repère

Dans cette partie on introduit le repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right)$.

On admettra que le point J a pour coordonnées $J\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

Q 15 Déterminer les coordonnées du point I.

Q 16 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JC}$.

Q 17 En expliquant votre démarche, dire si les points I, J et C sont alignés ?

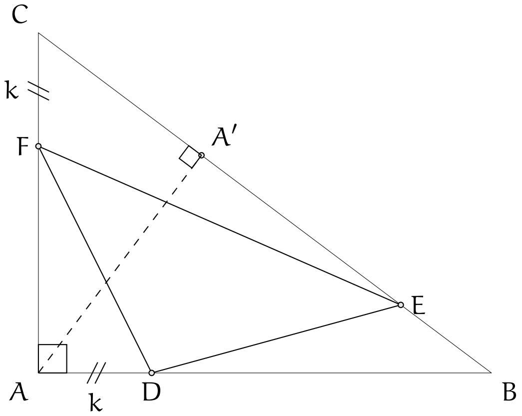
Q 18 Déterminer par la méthode de votre choix, une équation cartésienne de la droite (JC).

Q 19 Retrouver votre réponse à la question Q 17 en utilisant l'équation de la droite (JC).

Exercice VI (21 points)

Dans cet exerccie, $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé, et k un réel dans l'intervalle $[0;3]$. On considère :

- Les points $B(4;0)$, $C(0;3)$ et $D(k,0)$,
- Le F est placé sur le segment $[CA]$ tels que $CF = k = AD$,
- Le point E est le barycentre des points $(B, 5-k)$ et (C, k).
- A' le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



Q 20 Donner en fonction de k les coordonnées du point F et vérifier que l'on a : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} -k \\ 3-k \end{pmatrix}$

Q 21 Montrer que le point E a pour coordonnées $\left(4-\frac{4k}{5}, \frac{3k}{5}\right)$.

Q 22 Vérifier que $BE = k$.

Q 23 Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ vérifient : $5\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 20-9k \\ 3k \end{pmatrix}$.

Q 24 Déterminer les valeurs éventuelles de k telles que le triangle DEF soit rectangle en D.

Q 25 Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite (BC) ainsi qu'une équation cartésienne de cette droite.

Q 26 Sans calculer les coordonnées du point A', déterminer la longueur AA' *(On pourra utiliser au choix une méthode utilisant un calcul de distance ou une méthode utilisant des calculs d'aire...)*

Q 27 Déterminer les coordonnées du point A', puis retrouver le résultat de la question précédente Q 26.

Q 28 Déterminer l'aire du triangle DEF en fonction de k*(On rappelle que l'aire de ce triangle vaut* $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}\right)\right|$*)*

Q 29 Déterminer enfin pour quelle(s) valeur(s) de k l'aire du triangle DEF est minimale.