

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 (2H)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I

Attention : cet exercice est à rédiger sur l'énoncé et il est à rendre après 30' maximum.

Q1 On assiste au défilé des athlètes lors des JO de Paris 2024.

On sait que :

Tous les néo-zélandais portent une veste noire.

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre à la question par :

OUI, NON, ou ON NE PEUT PAS SAVOIR

	OUI	NON	?
On aperçoit un athlète avec une veste noire. Est-il néo-zélandais ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Ensuite, on voit quelqu'un qui porte une veste bleue. Est-il néo-zélandais ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
On croise un athlète néo-zélandais. Porte-t-il une veste noire ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
On voit ensuite un athlète français. A-t-il une veste noire ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
On termine avec un athlète espagnol. A-t-il une veste rouge ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Q2 Quelle est la contraposée de l'implication $P \implies Q$? $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$

Q3 Quelle est la négation de l'implication $P \implies Q$? $P \text{ ET } \text{non}(Q)$

Q4 Donner (sans la démontrer !) la contraposée de la propriété bien connue :

$$xy = 0 \implies x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Réponse : $x \neq 0 \text{ ET } y \neq 0 \implies xy \neq 0$

Q5 Donner la négation de la phrase : « Il y a au moins un coureur qui a eu au moins deux médailles aux J.O. »
Tous les coureurs ont eu au plus une médaille aux J.O.

Q6 On considère un entier $n \in \mathbb{N}$. Démontrer la phrase : « Si n^2 est impair, alors n est impair ».

Montrons la contraposée.

On suppose que n est pair, et on montre que n^2 est pair également.

Puisque n est pair, il existe un entier k tel que $n = 2k$.

Alors, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, donc n^2 est pair.

Ainsi, si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice II

Le plan est muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ et d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Q 7 La notation $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ signifie que les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base \mathcal{B} sont x et y .

Par quelle égalité vectorielle se traduit cette notation ?

► Réponse :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Q 8 La notation $A(x, y)_{\mathcal{R}}$ signifie que les coordonnées du point A dans le repère \mathcal{R} sont x et y .

Par quelle égalité vectorielle se traduit cette notation ?

► Réponse :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dont les coordonnées dans la base \mathcal{B} sont respectivement : $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Q 9 Quelles sont les coordonnées de $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ dans la base \mathcal{B} ?

► Réponse :

Dans la base \mathcal{B} , on obtient les coordonnées de \vec{w} par le calcul suivant :

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Q 10 Pourquoi peut-on dire que la famille $\mathcal{B}' \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base ?

► Réponse :

Cette famille est une base car les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

Q 11 On considère ensuite le vecteur \vec{w}_1 dont ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' sont : $\vec{w}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Déterminer les coordonnées de \vec{w}_1 dans la base \mathcal{B} .

► Réponse :

On a :

$$\vec{w}_1 = 1\vec{u} - 2\vec{v}$$

En passant aux coordonnées dans la base \mathcal{B} on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\vec{w}_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Q 12 On considère enfin le vecteur \vec{w}_2 dont ses coordonnées dans la base \mathcal{B} sont : $\vec{w}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Déterminer les coordonnées de \vec{w}_2 dans la base \mathcal{B}' .

► Réponse :

On cherche a et b tels que :

$$\vec{w}_2 = a\vec{u} + b\vec{v}$$

En passant aux coordonnées dans la base \mathcal{B} on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a + 3b = -1 & \text{(i)} \\ a - b = 3 & \text{(ii)} \end{cases}$$

En résolvant ce système, par exemple en faisant (i) - 2(ii) on trouve : $b = -\frac{7}{5}$.

Puis en reportant dans (ii) on trouve : $a = \frac{8}{5}$.

Ainsi $\vec{w}_2 \left(\begin{matrix} 8/5 \\ -7/5 \end{matrix} \right)_{\mathcal{B}}$.

Exercice III

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 + 7x + 5$.

Q 13 Donner (par la méthode de votre choix) les formes canonique (FC) et factorisée (FF) de f.

► Réponse :

Forme canonique (avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{4}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{9}{8}$) :

$$f(x) = 2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

Forme factorisée, on cherche d'abord les racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9 = 3^2$$

D'où l'on tire :

$$x = \frac{-b \pm \delta}{2a} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-7-3}{4} = -\frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{-7+3}{4} = -1 \end{cases}$$

D'où finalement :

$$f(x) = 2(x+1)(x+5/2)$$

Q 14 Résoudre l'équation : $(E_1) \quad f(x) = 0$.

► Réponse :

La question précédente permet de répondre immédiatement :

$$\mathcal{S} = \left\{ -1; -\frac{5}{2} \right\}$$

Q 15 Résoudre l'inéquation : $(I_1) \quad f(x) \geq 0$.

► Réponse :

Sachant que le trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici $a = 2 > 0$) à l'extérieur des racines, on

en déduit :

$$\mathcal{D} = \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right] \cup [-1; +\infty[$$

Q 16 Donner l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction f définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

► Réponse :

Notre fonction g est définie lorsque $f(x) \geq 0$.

D'où, d'après la question précédente :

$$\mathcal{D} = \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right] \cup [-1; +\infty[$$

Q 17 Résoudre enfin sur \mathcal{D} l'équation : $(E_2) \quad x + 1 = \sqrt{2x^2 + 7x + 5}$.

(On soignera particulièrement la rédaction du raisonnement. Celui-ci sera fait par équivalence ou par implication/réciproque au choix...)

► Réponse :

Faisons un raisonnement par implication/réciproque.

Implication : Supposons que $x + 1 = \sqrt{f(x)}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$

Alors en élevant l'égalité au carré on obtient :

$$(x + 1)^2 = 2x^2 + 7x + 5 \iff x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 7x + 5 \iff x^2 + 5x + 4 = 0$$

En résolvant cette dernière équation (on calcule Δ si besoin) on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Ces deux valeurs sont dans \mathcal{D}_f (voir question précédente), donc elles candidates à être solutions de (E_2) .

Réciproque : Vérifions si ces deux valeurs sont bien solutions de (E_2) :

$$\begin{cases} x_1 = -1 & : & x + 1 = -1 + 1 = 0 & \text{et} & \sqrt{2x^2 + 7x + 5} = \sqrt{0} = 0 \\ x_2 = -4 & : & x + 1 = -4 + 1 = -3 & \text{et} & \sqrt{2x^2 + 7x + 5} = \sqrt{9} = 3 \neq -3 \end{cases}$$

Ainsi, la seule solution de (E_2) est :

$$\mathcal{S} = \{-1\}$$

Exercice IV

Q 18 Résoudre les inéquations suivantes sans oublier de commencer par donner les ensembles de définition :

a. $(I_1) : \frac{2x+3}{x-3} < 1$

b. $(I_2) : |x-5| \leq 8$

c. $(I_3) : |3x-5| + |x-1| \leq 4$

► Réponse :

- Pour (I_1) :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

On réécrit l'inéquation :

$$\frac{2x+3}{x-3} - 1 < 0 \iff \frac{2x+3-(x-3)}{x-3} < 0 \iff \frac{x+6}{x-3} < 0$$

Le numérateur s'annule en $x = -6$ et le dénominateur en $x = 3$.

En étudiant le signe de chaque facteur, on trouve que le quotient est négatif lorsque $x \in]-6; 3[$ (faire un tableau de signe pour être sûr).

Ainsi :

$$\mathcal{S} =]-6; 3[$$

- Pour (I_2) :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$

Le plus rapide est d'utiliser les distances. On cherche les x tels que la distance entre x et 5 soit inférieure ou égale à 8.

Cela revient à dire que x est dans l'intervalle centré en 5 de rayon 8.

Ainsi :

$$\mathcal{S} = [-3; 13]$$

- Pour (I_3) :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$

On commence par déterminer les points où les expressions dans les valeurs absolues s'annulent : $3x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$ et $x - 1 = 0 \iff x = 1$.

On étudie donc l'inéquation sur les trois intervalles délimités par ces deux points :

- Si $x < 1$: $|3x - 5| = 5 - 3x$ et $|x - 1| = 1 - x$.

L'inéquation devient :

$$5 - 3x + 1 - x \leq 4 \iff -4x + 6 \leq 4 \iff -4x \leq -2 \iff x \geq \frac{1}{2}$$

Ainsi, sur cet intervalle, on a $\mathcal{S}_1 = [1/2; 1]$.

- Si $1 \leq x < \frac{5}{3}$: $|3x - 5| = 5 - 3x$ et $|x - 1| = x - 1$.

L'inéquation devient :

$$5 - 3x + x - 1 \leq 4 \iff -2x + 4 \leq 4 \iff -2x \leq 0 \iff x \geq 0$$

Ainsi, sur cet intervalle, on a $\mathcal{S}_2 = [1; 5/3]$.

- Si $x \geq \frac{5}{3}$: $|3x - 5| = 3x - 5$ et $|x - 1| = x - 1$.

L'inéquation devient :

$$3x - 5 + x - 1 \leq 4 \iff 4x - 6 \leq 4 \iff 4x \leq 10 \iff x \leq \frac{5}{2}$$

Ainsi, sur cet intervalle, on a $\mathcal{S}_3 = [5/3; 5/2]$.

En regroupant les trois solutions partielles, on trouve :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right]$$

Exercice V

Q 19 Résoudre l'équation (E_1) : $|\ln|x - 2|| = 2$

► Réponse :

On commence par déterminer l'ensemble de définition. On doit avoir $|x - 2| > 2$, c'est à dire $x \neq 2$.

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Puis on réécrit l'équation :

$$|\ln|x - 2|| = 2 \iff \ln|x - 2| = 2 \quad \text{ou} \quad \ln|x - 2| = -2$$

On résout chaque équation séparément :

- $\ln|x - 2| = 2$: en prenant l'exponentielle, on trouve :

$$|x - 2| = e^2 \iff x - 2 = e^2 \text{ ou } x - 2 = -e^2$$

D'où les solutions partielles :

$$x_1 = 2 + e^2 \text{ et } x_2 = 2 - e^2$$

- $\ln|x - 2| = -2$: en prenant l'exponentielle, on trouve :

$$|x - 2| = e^{-2} \iff x - 2 = e^{-2} \text{ ou } x - 2 = -e^{-2}$$

D'où les solutions partielles :

$$x_3 = 2 + e^{-2} \text{ et } x_4 = 2 - e^{-2}$$

En regroupant toutes les solutions partielles, on trouve finalement :

$$\mathcal{S} = \{2 + e^2; 2 - e^2; 2 + e^{-2}; 2 - e^{-2}\}$$

Q 20 On considère les fonctions polynômes f et g définies par :

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 \quad g(x) = 2x - 6$$

Déterminer la position relative des courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g des fonctions f et g .

► Réponse :

On doit étudier le signe de la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$:

$$h(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2(x^3 - 3x^2 - x + 3)$$

Pout étudier le signe de h on cherche à factoriser en trouvant une racine « évidente ». Il est clair que $x = 1$ convient. Ainsi on peut écrire :

$$h(x) = 2(x - 1)(ax^2 + bx + c) = 2(ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c)$$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \implies b = -2 \\ c - b = -1 \implies c = -3 \\ -c = 3 \implies c = -3 \end{cases}$$

D'où la factorisation complète :

$$h(x) = 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

on peut alors étudier le signe de h en étudiant le signe de chacun des facteurs puis en remplissant un tableau de signes :

- Le trinôme $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ (on utilise Delta si besoin) est positif à l'extérieur des racines -1 et 3 .
- La fonction $x - 1$ est négative pour $x < 1$ et positive pour $x > 1$.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$x - 1$	-	0	0	+	+
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-	0	+	0	+

Conclusion :

\mathcal{E}_f est en-dessous de \mathcal{E}_g sur l'ensemble $] -\infty; -1] \cup] -1; 1[$ et au-dessus sur $]3; +\infty[$.