

DEVOIR SURVEILLÉ N°5 (3H)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I

Les questions suivantes sont indépendantes.

Q1 Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ si la matrice A suivante est échelonnée. Dans ce cas (uniquement) donner son rang.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a+1 & 3 \\ 0 & a(a^2-4) & 2 & 3a \\ 0 & 0 & a(a-2) & 3a(a-1) \end{pmatrix}$$

Q2 Déterminer la matrice échelonnée réduite de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Q3 Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $u(0, 2, 1, 0)$, $v(3, 1, 0, 0)$ et $w(1, 0, 1, 2)$.

a. Les vecteurs u , v et w forment-ils une famille génératrice de \mathbb{R}^4 ?

b. Les vecteurs u , v et w forment-ils une famille libre ou liée de \mathbb{R}^4 ?

c. Déterminer une équation cartésienne de l'espace $F = \text{Vect}(u, v)$.

Q4 On considère l'espace $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases} \right\}$.

Montrer que $G = \text{Vect}(u)$ où u est un vecteur de \mathbb{R}^3 à déterminer.

Q5 Pour quelle(s) valeur(s) du réel k le système suivant est-il compatible ? (*On ne demande pas de résoudre le système.*)

$$(S) \begin{cases} x + y - z = k \\ 2x + 2y = 1 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

Exercice II

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

Q6 À l'aide d'une « récurrence descendante », déterminer la forme explicite de la suite (u_n) .

On se propose maintenant de retrouver cette expression par une autre méthode.

Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = u_n - 1$.

Q7 Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

Q8 Donner la forme explicite de (v_n) , puis celle de (u_n) , et comparer avec le résultat de **Q6**.

Q9 Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Q 10 Déterminer la limite de $\frac{S_n}{2^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

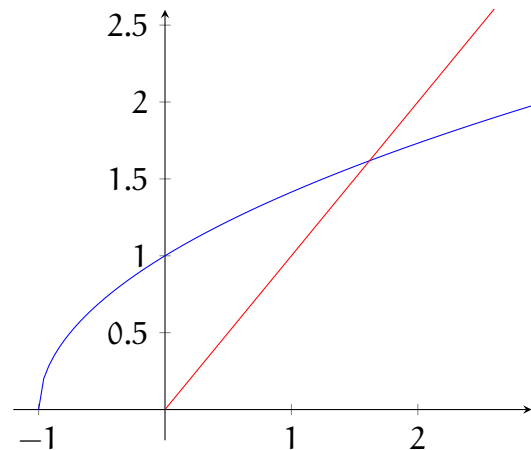
Exercice III

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

ainsi que la droite d'équation $y = x$.



Q 11 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution le réel : $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Q 12 Reproduire rapidement sur votre copie un croquis de ces représentations graphiques et dessiner (en laissant les traits de construction sur le graphique) sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 , ainsi que le réel α .

Q 13 Quelles conjectures pouvez-vous faire quant au sens de variation de la suite (u_n) et à sa limite éventuelle ?

Q 14 On note $I = [-1 ; \alpha]$. Justifier que f est croissante sur I , puis montrer que $f(I) \subset I$ et conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \alpha$.

Q 15 Montrer à l'aide d'une mini-récurrence que (u_n) est croissante.

Q 16 Justifier soigneusement que (u_n) est convergente.

Q 17 Déterminer sa limite.

Exercice IV

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Q 18 Écrire une fonction python `suite(n)` qui reçoit un entier n positif et qui renvoie les valeurs de u_n et v_n correspondantes.

Q 19 Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

Q 20 Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $w_n = 8 \left(\frac{5}{12} \right)^n$

- Q 21** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
- Q 22** Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont la même limite ℓ (*on ne demande pas de calculer cette limite*).
- Q 23** Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante égale à 46, et en déduire la valeur de la limite ℓ des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice V

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

On considère également la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 3$.

- Q 24** Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 (*On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles*).
- Q 25** Montrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$
- Q 26** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $-1 \leq v_n \leq 0$
- Q 27** À l'aide des questions précédentes, étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$, pour montrer que la suite (v_n) est croissante.
- Q 28** En utilisant judicieusement les question précédentes, justifier que la la suite (v_n) converge vers une limite ℓ , puis déterminer cette limite.
- Q 29** Justifier enfin que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Hors barème.

Exercice VI

On considère la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$$

- Q 30** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.
- Q 31** Montrer que (u_n) est strictement croissante.
- Q 32** Démontrer par l'absurde que (u_n) ne peut converger vers aucun réel.
- Q 33** En déduire le comportement de la suite (u_n) à l'infini.