

# DEVOIR MAISON TOUSSAINT

Ce travail qui fait un petit bilan sur la géométrie plane dans le but de préparer le DS de la rentrée. Il est à faire pendant les vacances de la Toussaint et à rendre le lundi 03 novembre.

Pensez à bien vous organiser entre repos et gestion du travail de toutes les disciplines. Faire un petit planning peut être utile pour ne pas s'égarer.

Bon courage et bonnes vacances.

## Exercice I

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère trois points  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 3)$  et  $C(3, 6)$  et une droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $x + 6y - 4 = 0$ .

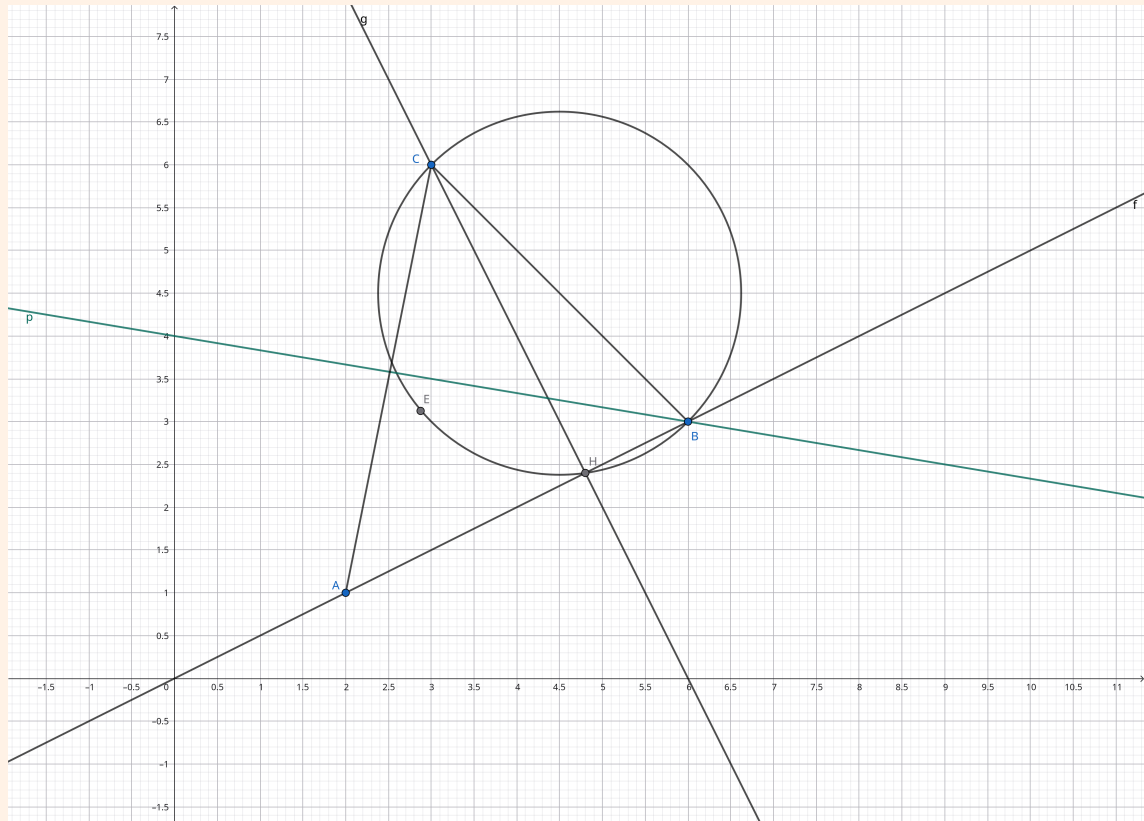
- Q 1** Faire une figure soignée représentant les trois points et la droite.
- Q 2** Le point B appartient-il à la droite  $\mathcal{D}$  ? Justifier.
- Q 3** Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
- Q 4** Déterminer une équation paramétrique de la droite (AC).
- Q 5** La droite  $\mathcal{D}$  est-elle orthogonale à (AC) ? Justifier.
- Q 6** Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}'$  orthogonale à (AB) et passant par C.
- Q 7** Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
- Q 8** Déterminer de deux façons différentes la distance entre C et la droite (AB).
- Q 9** Déterminer de deux façons différentes l'aire du triangle ABC.
- Q 10** Déterminer une équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre [BC].
- Q 11** Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 4, 1 et 3 et placer ce point sur votre figure.
- Q 12** Le point G appartient-il au cercle de diamètre [BC] ? Justifier (Attention les calculs pouvant être pénibles, vous pouvez utiliser éventuellement votre machine à calculer...).

# Correction

## ► Réponse :

Remarque globale : pour des raisons de place, j'ai souvent écrit les coordonnées des vecteurs en ligne, mais je vous recommande toujours de les écrire en colonne.

### Q1 (1 point)



**Q2 (1 point)** On remplace les coordonnées de B dans l'équation de  $\mathcal{D}$  :  $6 + 6 \times 3 - 4 = 20 \neq 0$ .

Le point B n'appartient pas à la droite  $\mathcal{D}$ .

**Q3 (1 point)** On peut utiliser un vecteur directeur de (AB) :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$  d'où  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Un vecteur normal est donc  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Une équation cartésienne de (AB) est donc  $2(x - x_A) - 4(y - y_A) = 0$  soit après division par 2 pour simplifier :  $(AB) : x - 2y = 0$ .

**Q4 (1 point)** Un vecteur directeur de (AC) est  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Une équation paramétrique de (AC) est donc :

$$(AC) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Q5 (1 point)** Un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ . On veut savoir si ce vecteur est colinéaire à  $\overrightarrow{AC}$ . On calcule le déterminant :  $\det(\vec{n}, \overrightarrow{AC}) = 1 \times 5 - 6 \times 1 = -1 \neq 0$ .

La droite  $\mathcal{D}$  n'est pas orthogonale à (AC).

**Q 6** (2 points) Un vecteur directeur de (AB) est  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\left(\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right)$ . Ce vecteur est donc normal à  $\mathcal{D}'$ . Une équation cartésienne de  $\mathcal{D}'$  est alors  $2(x - x_C) + 1(y - y_C) = 0$  soit après simplification :  $\mathcal{D}' : 2x + y - 12 = 0$ .

**Q 7** (3 points) Le point H est l'intersection de (AB) et de  $\mathcal{D}'$ . On résout le système :

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

On peut par exemple obtenir  $x = 2y$  dans la première équation et le remplacer dans la seconde :  $2 \times 2y + y = 12$  soit  $5y = 12$  d'où  $y = \frac{12}{5}$  et donc  $x = \frac{24}{5}$ .

$$H\left(\begin{matrix} 24/5 \\ 12/5 \end{matrix}\right).$$

**Q 8** (2 points) Méthode 1: la distance entre C et (AB) est la longueur du segment [CH]. On calcule donc :

$$CH = \sqrt{\left(\frac{24}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{12}{5} - 6\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(-\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{324}{25}} = \sqrt{\frac{405}{25}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

Méthode 2 : on utilise la formule de la distance d'un point à une droite :

$$d(C, (AB)) = \frac{|1 \times 3 - 2 \times 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

La distance entre C et (AB) est  $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ .

**Q 9** (2 points) Méthode 1 : l'aire du triangle ABC est  $\frac{1}{2} \times AB \times CH$ . On calcule :

$$AB = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

D'où :

$$\text{Aire}_{(ABC)} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{9\sqrt{5}}{5} = \frac{9 \times 5}{5} = 9.$$

Méthode 2 : on utilise la formule de l'aire avec le déterminant :

$$\text{Aire}_{(ABC)} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} |4 \times 5 - 2 \times 1| = 9.$$

L'aire du triangle ABC est 9.

**Q 10** (2 points) On peut déterminer le centre et le rayon du cercle de diamètre [BC] en introduisant le milieu I de [BC]. On a :

$$I\left(\begin{matrix} \frac{6+3}{2} \\ \frac{3+6}{2} \end{matrix}\right) = I\left(\begin{matrix} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{matrix}\right).$$

Le rayon est  $R = \frac{BC}{2}$ . On calcule :

$$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Donc  $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . Une équation cartésienne du cercle est donc :

$$\mathcal{C} : \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

**Q 11** (2 points) Pour calculer les coordonnées du barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 4, 1 et 3, on fait la moyenne coefficientée des coordonnées :

$$x_G = \frac{4 \times 2 + 1 \times 6 + 3 \times 3}{4 + 1 + 3} = \frac{23}{8}, \quad y_G = \frac{4 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 6}{4 + 1 + 3} = \frac{25}{8}.$$

$$G \left( \begin{array}{c} 23/8 \\ 25/8 \end{array} \right).$$

**Q 12** (2 points) On remplace les coordonnées de G dans l'équation du cercle :

$$\left( \frac{23}{8} - \frac{9}{2} \right)^2 + \left( \frac{25}{8} - \frac{9}{2} \right)^2 = \left( \frac{23 - 36}{8} \right)^2 + \left( \frac{25 - 36}{8} \right)^2 = \frac{169}{64} + \frac{121}{64} = \frac{290}{64} = \frac{145}{32}.$$

Or  $\frac{145}{32} > \frac{144}{32} = \frac{9}{2}$ .

Le point G n'appartient pas au cercle de diamètre [BC].

On peut remarquer toutefois que G est très proche du cercle (il y a presque égalité dans le calcul précédent...).