Corrigé CCB 2025

Exo I :

Q1a. $\boxed{F \text{ est un ev}}$, car c'est un sev de l'espace de référence des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. En effet :

- la fonction nulle est une f^n continue et paire.
- Si f et g sont deux fonctions continues et paires, alors $f+g$ aussi continue et $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, donc $f+g$ paire.
- Idem avec λf.

Q1b. $\boxed{G \text{ n'est pas un ev}}$, car la suite nulle n'est pas dans G (elle ne conv. pas vers 1).

Q2a. $\boxed{\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4}$

Q2b. Puisque $p_2 = p_1 + p_3$, la famille $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ n'est pas libre}}$.

Q2c. D'après la question précédente Q2b, $rg(\mathcal{F}_1) \leq 3$.

Or p_2, p_3 et p_4 sont de degrés échelonnés, donc libres, donc $rg(\mathcal{F}_1) \geq 3$.

Conclusion : $\boxed{rg(\mathcal{F}_1) = 3}$

Q2d. $\boxed{Vect(\mathcal{F}_1) \neq \mathbb{R}_3[X]}$ car $\dim(Vect(\mathcal{F}_1)) = 3$ et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

Q3.a. Considérons la comb. linéaire nulle :

$$a.\cos + b.\sin + c.1 = 0$$

(ie) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + b\sin(x) + c = 0$

- Avec $x = 0$ on a nécessairement : $a \times 1 + b \times 0 + c = 0$
  $a + c = 0 \quad (i)$
- Avec $x = \frac{\pi}{2}$ on a : $b + c = 0 \quad (ii)$
- Avec $x = \frac{\pi}{4}$ on a : $(a+b)\frac{\sqrt{2}}{2} + c = 0 \quad (iii)$

(i) et (ii) donnent $a = b = -c$

On reporte ds (iii) : $-\sqrt{2}c + c = 0$ d'où $c = 0$

Donc $a = b = c = 0$, donc $\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ est libre}}$.

Q3b. L'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie, et $\mathcal{F}_2$ a 3 éléments, donc $\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ n'est pas une base de } \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

Exo I (suite) :

Q4a. F est engendré par deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires. Donc $\mathrm{Dim}(F) = 2$.

Q4b. • Prenons $v=(x,y,z)$ et $v'=(x',y',z')$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$u(v+v') = u((x+x', y+y', z+z'))$$
$$= x+x'+y+y'+z+z'$$
$$= (x+y+z)+(x'+y'+z')$$
$$= u(v)+u(v')$$

• De même, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(\lambda v) = \lambda u(v)$.

• Enfin : $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Conclusion : u est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$

Q4c. Th. rg : $\dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Or $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}$ et u n'est pas nulle, donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 3-1 = 2$.

Or $\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) \,/\, x+y+z=0\} = G$

Donc $\dim G = 2$.

Q4d. • $\dim F = \dim G = 2$.

• De plus $F \subset G$ car : $1+1-2=0$ et $-2+1+1=0$

Donc $F = G$.

Q4e. • Montrons que $H \cap F = \{0\}$: soit $v \in F \cap H$.

$\to v \in H$, $v = (\lambda,\lambda,\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\to v \in F$, donc $v = a(1,1,-2) + b(-2,1,1)$

D'où
$$\begin{cases} \lambda = a-2b & (i) \\ \lambda = a+b & (ii) \\ \lambda = -2a+b & (iii) \end{cases}$$

$(ii)-(i)$ donne $b=0$, puis $(ii)-(iii)$ donne $a=0$

Donc $H \cap F = \{0\}$. La somme $F+H$ est directe.

• De plus : $\dim(F) + \dim(H) = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Conclusion : $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$

Q5a.
$$\mathrm{Mat}_{B_3,B_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} = A$$

$f(X^2) = (X+1)2 + 2.2X = 6X+2$

$f(X^3) = (X+1)6X + 2.3X^2 = 12X^2 + 6X$

Q5b. Le rg de f est aussi le rg de A. Or cette matrice est déjà échelonnée avec 3 pivots, donc $\mathrm{rg} f = 3$.

Q5c. Th. rg : $\dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg} f = \dim(\mathbb{R}_3[X])$

D'où $\dim(\mathrm{Ker} f) = 4-3 = 1$.

Or : $f(1) = 0$, donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{1\}$

Q6. On résout le système :
$$\begin{cases} x-2y = 0 \\ y+z-3t = 0 \end{cases}$$

Deux paramètres z et t :

$y = -z+3t$, et $x = 2y = -2z+6t$

D'où $(x,y,z,t) = z(-2,-1,1,0) + t(6,3,0,1)$

D'où $F = \mathrm{Vect}\{(-2,-1,1,0),(6,3,0,1)\}$

Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc une base de F est $\{(-2,-1,1,0),(6,3,0,1)\}$

Exo I (suite)

Q7a. Le noyau de f est l'ensemble des (x,y,z) tels que $f(x,y,z)=0$. Cela revient à chercher les $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $M.X=0$. On résout le système associé à la matrice M :

$$M=\begin{pmatrix}1&-3&4\\2&-3&5\\-1&3&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-3&4\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2 pivots : z = param.

$$\begin{cases}x=3y-4z\\y=z\end{cases}\quad \text{d'où} \quad \begin{cases}x=-z\\y=z\end{cases}$$

Conclusion $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\{(-1,1,1)\}}$

Q7b. Th rg : $rg(f)=\dim \mathbb{R}^3-\dim \mathrm{Ker} f=3-1=2$.

$\boxed{rg(f)=2}$. f ne peut donc pas être surjective (car $2<3$)

Q7c. Mq $(-1,1,1)\in \mathrm{Im}(f)$, (ie) $\exists(x,y,z)$ tel que $M.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&-1\\2&-3&5&1\\-1&3&-4&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&-1\\0&3&-3&3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

La ligne de 0 justifie que le système est compatible donc (x,y,z) existent. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f)\subset \mathrm{Im}(f)}$.

Q7d. Non, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne peuvent être supplémentaires car $\mathrm{Ker}\, f\cap \mathrm{Im}\, f=\mathrm{Ker}\, f\neq\{0\}$.

Exo II

Q8. Rappelons que $f(u) = u \iff Mat_B(f(u)) = Mat_B(f) \times M_B(u)$

$\iff Mat_B(f(u)) = M.U$

On a :

- $M.U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = U$

donc $\boxed{f(u) = u.}$

- $M.V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2V.$ donc $\boxed{f(v) = 2v.}$

- $M.W = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3w$ donc $\boxed{f(w) = 3w.}$

Q9. $Mat_B B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

On peut calculer son déterminant avec Sarrus par exple :

$\det = 0 + (-3) + 0 - (-1 + 0 - 1) = -3 + 2 = -1 \neq 0.$

Donc $\boxed{B' \text{ base de } \mathbb{R}^3.}$

Q10. $\boxed{Mat_{B'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D}$

Q11. $P_{BB'}$ est la matrice de la Q9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Q12. Calculons $P^{-1} \times P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

Donc P^{-1} est bien l'inverse de P.

Q13. $Mat_{B'B'} f = P_{B'B} \, Mat_B(f) \, P_{BB'}$

ie $D = P^{-1} M P$, d'où $\boxed{M = PDP^{-1}}$

Q14 $M^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})$

$= PD^nP^{-1}$

avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

il reste à faire le produit !

Exo IV

Q15. • $s : E \to E$.

• Soit $Q = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q' = a_0' + a_1' X + a_2' X^2$

$s(Q + Q') = s(a_0 + a_0' + (a_1 + a_1')X + (a_2 + a_2')X^2)$

$= (a_2 + a_2') + (a_1 + a_1')X + (a_0 + a_0')X^2$

$= a_2 + a_1 X + a_0 X^2 + a_2' + a_1' X + a_0' X^2$

$= s(Q) + s(Q')$.

• idem avec $s(\lambda Q) = \lambda s(Q)$.

Donc $\boxed{s \in \mathcal{L}(E)}$

Q16. $s(1) = X^2$, $s(X) = X$, $s(X^2) = 1$.

D'où $\boxed{\mathrm{Mat}_B\, s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M}$.

Q17. $M_1 = M - Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On cherche les $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $MX = 0$.

On peut voir que $C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$

Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de M_1.

M_1 n'étant pas nulle, d'après le th. du rang,

$\dim \mathrm{Ker}(M_1) \leq 2$. Donc $\boxed{B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\, M_1}$

Q18. De m : $M_2 = M + Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut remarquer que $rg(M_2) = 2$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg = 2$, donc $\dim \mathrm{Ker}\, M_2 = 1$ (Th. rg)

On $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est ds le noyau. $\boxed{\mathrm{Ker}\, M_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}$

Q19. • $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et $\dim(\mathrm{Ker}\, M_1) + \dim(\mathrm{Ker}\, M_2) = 2+1 = 3$

• Mq $\mathrm{Ker}(M_1) \cap \mathrm{Ker}(M_2) = \{0\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, M_1 \cap \mathrm{Ker}\, M_2$

$\to X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ car $\in \mathrm{Ker}\, M_2$.

$\to X = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ c \end{pmatrix}$ car $\in \mathrm{Ker}\, M_1$

D'où $\begin{cases} a = c \\ 0 = b \\ -a = c \end{cases}$ donc $a = b = c = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(M_1) \cap \mathrm{Ker}(M_2) = \{0\}$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(M_1) \oplus \mathrm{Ker}(M_2)}$

Q20. Notons $B_1 = (X_1, X_2)$ et $B_2 = (X_3)$

• $M_1 X_1 = 0$ (ie) $(M - I)X_1 = 0$

D'où $MX_1 = X_1$

De m : $MX_2 = X_2$.

• $M_2 X_3 = 0$ (ie) $(M + I)X_3 = 0$ d'où $MX_3 = -X_3$

On déduit la matrice de s dans B_3 :

$\boxed{\mathrm{Mat}_{B_3}\, s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

Exo IV.

Q21.

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 & X^2+1 \\
\hline
X^4+X^2 & X^2-1 \\
\hline
-X^2 & \\
-X^2-1 & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

Q22.

D'où $X^4 = (X^2+1)(X^2-1)+1$

Q23.

$$F(x) = \int_0^x \tan^4(\theta)\,d\theta \underset{\substack{t=\tan\theta \\ dt=(1+t^2)d\theta}}{=} \int_0^{\tan x} \frac{t^4}{1+t^2}\,dt$$

Q24.

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{(t^2+1)(t^2-1)+1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\tan x} t^2-1\,dt + \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^{\tan x} + \left[\arctan t\right]_0^{\tan x}$$

$$F(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x$$

Q25.

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

Exo V.

Q26. $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \boxed{\ln 2 = f(0)}$

Q27. $f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{1+t-1}{1+t}\,dt$

$= \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = 1 - [\ln(1+t)]_0^1$

$\boxed{f(1) = 1 - \ln 2}$

Q28. $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$

D'où $\boxed{\frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k}$

Q29. $f(n) = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{(-1)^n(-t)^n}{1+t}\,dt$

$= (-1)^n \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \,dt$

$= (-1)^n \left([\ln(1+t)]_0^1 - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-t)^k dt \right)$

$= (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{(-t)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \right)$

$\boxed{f(n) = (-1)^n \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}}$

Q30.
```
def f(n: int) -> float:
    assert n >= 0
    fn = (-1)**n * math.log(2)
    s = sum([(-1)**(k+1)/(k+1) for k in range(n)])
    fn = fn + (-1)**n * s
    return fn.
```

Q31. $0 \leq t \leq 1$

$1 \leq t+1 \leq 2$ $\quad +1$

$\boxed{\frac{1}{1} \geq \frac{1}{1+t} \geq \frac{1}{2}}$ $\quad$ inverse

Q32. On a : $\forall t \in [0,1]$,

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

$\frac{t^x}{2} \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x$ $\quad$ car $t^x \geq 0$

$\frac{1}{2}\int_0^1 t^x dx \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dx$ $\quad$ $\int_0^1$ conserve l'ordre.

Or $\int_0^1 t^x dx = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1}$

D'où $\boxed{\frac{1}{2(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}}$

Q33. Par th. gendarmes : $\boxed{f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0}$

Q34.
```
def seuil(eps: float) -> int:
    assert eps > 0
    n = 0
    while f(n) >= eps:
        n += 1
    return n
```

Q35. $f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t}\,dt$

$= \int_0^1 t^x dx = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1)}$

Q36. Puisque $f \searrow$ sur $\mathbb{R}^+$:

$f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$ $\quad + f(x)$

$\boxed{f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x)}$

Q37. On déduit de Q35 et Q36 :

$\frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$ $\quad \div \frac{1}{x} > 0$

$\frac{x}{x+1} \leq \frac{2f(x)}{1/x} \leq \frac{x}{x-1}$

$\frac{x}{x+1} \to 1$, $\quad \frac{x}{x-1} \to 1$

Donc $2f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

(ie) $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$

Exo VI

Q38.

```
def facto(n):
    if n==0:
        return 1
    return n * facto(n-1)
```

Q39.

```
def pascal1(n:int, k:int) -> int:
    return facto(n) / facto(k) / facto(n-k)
```

Q40. facto est de complexité $O(n)$

Donc pascal1 est de complexité $n + n//2 + n//2$

ie $O(2n) = O(n)$

Q41.

```
def pascal2(n:int, k:int) -> int:
    assert 0<=k<=n
    if k==0 or k==n : return 1
    return pascal2(n-1, k-1) + pascal2(n-1, k)
```

Q42.

```
def valide(n:int) -> bool:
    S = sum([pascal2(n,k) for k in range(n+1)])
    return S == 2**n
```