Concours Blanc Mathématiques/Informatique (4h)

Il sera tenu compte de la qualité de **présentation/rédaction** de votre copie.
Les calculatrices. **NE sont PAS** autorisées.
Les points affichés entre parenthèses sont purement indicatifs et pourront donner lieu à modification.

Partie algèbre linéaire

Exercice I (Environ 27 points)

Dans cet exercice, les 7 questions sont indépendantes.

Q 1 **a.** L'ensemble F des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et paires est-il un espace vectoriel ? Justifier la réponse.

b. L'ensemble G des suites réelles qui convergent vers 1 est-il un espace vectoriel ? Justifier la réponse.

Q 2 Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille $\mathscr{F}_1 = \{\underbrace{X^2+X+1}_{p_1}, \underbrace{X^2+3X+1}_{p_2}, \underbrace{2X}_{p_3}, \underbrace{X^3+3}_{p_4}\}$.

a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$? *(Aucune justification n'est demandée.)*

b. En remarquant que $p_2 = p_1 + p_3$, que pouvez-vous déduire quant-à la liberté de la famille $\mathscr{F}_1$?

c. Quel est le rang de la famille $\mathscr{F}_1$?

d. Est-ce que $Vect(\mathscr{F}_1) = \mathbb{R}_3[X]$?

Q 3 Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille $\mathscr{F}_2 = \{\cos, \sin, 1\}$.

a. Montrer soigneusement que cette famille est libre.

b. Est-ce une base de l'espace-vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Justifier la réponse.

Q 4 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $F = Vect((1,1,-2),(-2,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\}$.

a. Déterminer la dimension de F.

b. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x,y,z) = x+y+z$.
Montrer rapidement que u est une forme linéaire.

c. En déduire la dimension de G *(on pourra utiliser le théorème du rang...)*.

d. Montrer que $F = G$.

e. On considère enfin $H = Vect((1,1,1))$. Les espaces F et H sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Q 5 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'' + 2P' \end{array}$

On note $B_3 = (1, X, X^2, X^3)$ et $B_2 = (1, X, X^2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ respectivement.

a. Donner $A = \mathscr{M}_{B_3,B_2}(f)$, la matrice de f dans les bases B_3 et B_2.

b. Quel est le rang de f ?

c. Quel est le noyau de f ?

Q 6 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère le sous-espace vectoriel $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x-2y=0 \text{ et } y+z-3t=0\}$. Déterminer une base de F.

Q 7 On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une base de $Ker(f)$.

b. Quel est le rang de f ? Est-elle surjective ?

c. Vérifier que $Ker(f) \subset Im(f)$.

d. $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice II (Environ 12 points)

On note $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathscr{B}$.

On considère les trois vecteurs u, v et w dont les matrices dans la base canonique $\mathscr{B}$ sont

$$U = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad W = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Q 8 Montrer que $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = 3w$.

Q 9 Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Q 10 Déterminer $D = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Q 11 Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

Q 12 Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q 13 Exprimer M en fonction de D, P et P^{-1}.

Q 14 En déduire l'expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice III (Environ 10 points)

Dans ce problème, $E = \mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
Si a_0, a_1, a_2 sont 3 réels et Q est le polynôme défini par $Q = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, on définit le polynôme $s(Q)$ par $s(Q) = a_2 + a_1 X + a_0 X^2$.
Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en *inversant l'ordre des coefficients.*

Q 15 Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est un endomorphisme de E.

Q 16 Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme s dans la base canonique $B = \left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q 17 On note $M_1 = M - Id_3$ (où Id_3 est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$) et $Ker(M_1)$ le noyau de M_1.
Déterminer une base B_1 de $Ker(M_1)$.

Q 18 On note $M_2 = M + Id_3$ (où Id_3 est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$) et $Ker(M_2)$ le noyau de M_2.
Déterminer une base B_2 de $Ker(M_2)$.

Q 19 Montrer $\mathbb{R}^3 = Ker(M_1) \oplus Ker(M_2)$.

Q 20 Donner la matrice de s dans la base $B_3 = B_1 \cup B_2$.

Partie analyse : intégration

Exercice IV (Environ 8 points)

L'objectif de l'exercice est d'obtenir une expression sans symbole intégral de la fonction F définie par :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad F(x) = \int_0^x \tan^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Q 21 Soit $P(X) = X^4$ et $Q(X) = X^2 + 1$. Effectuer la division euclidienne de P par Q.

Q 22 En déduire que $X^4 = (X^2+1)(X^2-1)+1$

Q 23 Effectuer le changement de variable $t = \tan\theta$ pour montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^{\tan(x)} \frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Q 24 Utiliser la question Q 22 pour découper l'intégrale en deux et la calculer.

Q 25 Combien vaut $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

Exercice V (Environ 18 points)

On souhaite dans cet exercice obtenir quelques résultats sur la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$$

Partie 1 : calcul de f pour des valeurs entières de x

Q 26 Montrer que $f(0) = \ln 2$.

Q 27 En remarquant que $t = t + 1 - 1$, calculer $f(1)$.

Q 28 On rappelle la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$. Montrer alors que pour tout $t \in [0;1]$ on a : $\displaystyle\frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k$

Q 29 En déduire, en remarquant que $t^n = (-1)^n(-t)^n$, que pour tout $n \geqslant 1$:

$$f(n) = (-1)^n \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

Q 30 Écrire une fonction Python de signature `def f(n : int) -> float` qui calcule $f(n)$ pour tout $n \geqslant 0$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie cette valeur.
On supposera que la bibliothèque `math` a été chargé préalablement et que l'on obtient la valeur de $\ln(2)$ en tapant `math.log(2)`.

Partie 2 : limites de f aux bornes

Q 31 Montrer que si $0 \leqslant t \leqslant 1$ alors $\displaystyle\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$.

Q 32 En déduire que pour tout $x \geqslant 0$ on a : $\displaystyle\frac{1}{2(x+1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$.

Q 33 En déduire la limite de f en $+\infty$.

Q 34 En utilisant la fonction créée à la question Q 30, écrire une fonction de signature `def seuil(eps : float)->int` qui reçoit un flottant *eps* et qui renvoie le plus petit entier n tel que $0 < f(n) < eps$. *(On pourra admettre que cet entier existe.)*

Partie 3 : équivalent de f en $+\infty$

Q 35 Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a : $\displaystyle f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$

Q 36 En admettant que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a :

$$f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1)$$

Q 37 En déduire un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

Partie python

Exercice VI (10 points)

Voici quelques rappels au sujet des coefficients de Pascal. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé on a :

- Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la formule (1) : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la relation de récurrence (2) : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- On a $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Q 38 Écrire une fonction `facto(n : int) -> int` qui calcule la factorielle de n. Vous pouvez au choix écrire une fonction itérative (avec une boucle) ou récursive.

Q 39 Écrire une fonction `pascal1(n : int, k : int) -> int` qui calcule le coefficient de Pascal $\binom{n}{k}$ en utilisant la formule (1).

Q 40 Quelle est la complexité de cette fonction `pascal1` en fonction de n (pour simplifier un peu, on pourra fixer k à $n//2$ par exemple) ?

Q 41 Écrire une fonction `pascal2(n : int, k : int) -> int` qui calcule le coefficient de Pascal $\binom{n}{k}$ en utilisant la relation de récurrence (2). On attend ici une fonction **récursive.**

Q 42 Écrire une fonction `valide(n : int) -> bool` qui renvoie `True` si la formule $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} = 2^n$ est vérifiée, `False` sinon.