

PLANCHE D

GÉOMÉTRIE PLANE

□ Exercice D1

Soit un triangle non aplati ABC et I le milieu du segment $[AB]$.

Q1 Exprimer la somme vectorielle $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ en fonction du vecteur \overrightarrow{MI} .

Q2 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la famille $\{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AC}\}$ est liée.

□ Exercice D2 (changement de base)

Le plan est muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ de vecteurs du plan. Soit $\vec{w}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs du plan (les coordonnées sont données dans la base \mathcal{B}).

Q1 Déterminer les coordonnées dans \mathcal{B} du vecteur $\vec{w} = -3\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 - 5\vec{w}_3$.

Q2 Déterminer un couple de réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{u} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.

Q3 a. Démontrer de même que $\vec{v} = \frac{3}{17}\vec{w}_1 + \frac{2}{17}\vec{w}_2$.

b. Pourquoi \vec{w}_1 et \vec{w}_2 forment-ils une base \mathcal{B}' du plan ?

c. Quelles sont les coordonnées de \vec{w}_3 dans \mathcal{B}' ?

□ Exercice D3 (changement de base)

Le plan est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs du plan dont on note $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ la base orthonormée de vecteurs associée.

Q1 a. Vérifier que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ forment une base de vecteurs du plan notée \mathcal{B}' .

b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base \mathcal{B}' .

Q2 Soit $A(3; 2)$ dans le repère \mathcal{R} . Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$?

Q3 Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}'' = (O; \vec{u}, \vec{v})$, ou $\Omega(2; -3)_{\mathcal{R}'}$?

□ Exercice D4

Soit $ABCD$ un quadrilatère. En utilisant un repère bien choisi, montrer que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

□ Exercice D5 (Affixes)

Refaire l'exercice précédent en utilisant les nombres complexes pour le repérage.

□ Exercice D6 (Passage en polaire)

Déterminer les coordonnées polaires de $A(1, -\sqrt{3})$, de $B(-2, 2)$, de $C(-\sqrt{3}, -1)$ et de $D(-6, 8)$.

Exercice D7 (Coordonnées polaires)

Le plan est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points suivants définis par leurs coordonnées polaires :

$$A \left[1, \frac{\pi}{4} \right] \quad B \left[\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad C \left[2, \frac{\pi}{4} \right]$$

- Q1** a. Représenter ces points et donner leurs coordonnées cartésiennes.
b. Justifier que ces points sont alignés sur une droite passant par O .

Q2 Donner les coordonnées polaires de A , B , C et O dans le repère $\mathcal{R}' = (A; \vec{i}, \vec{j})$.

 Exercice D8 (Barycentres)

ABC est un triangle.

Q1 Placer le point G barycentre de $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$.

Q2 Montrer que $ABCG$ est un parallélogramme.

 Exercice D9 (Barycentres)

On considère trois points $A(2, 1)$, $B(-3, -1)$ et $C(5, 2)$. Déterminer les coordonnées du barycentre de $(A; 2)$, $(B; -2)$ et $(C; 3)$.

 Exercice D10 (Barycentres)

On considère deux points A et B .

Q1 Que dire de l'ensemble des barycentres de A et B ?

Q2 Que dire de l'ensemble des barycentres de A et B dont les coefficients ont même signe ?

Q3 Quel est l'ensemble des points M barycentres de $(A; t)$, $(B; 1 - t)$ avec $t \in [0, 1]$?

 Exercice D11 (Barycentres et associativité)

On considère les points $A(-5, 3)$, $B(1, 0)$, $C(-5, -6)$ et $D(1, -2)$.

Q1 Déterminer les coordonnées du barycentre I des points $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

Q2 Déterminer les coordonnées du barycentre J des points $(C, 3)$ et $(D, -1)$.

Q3 Déterminer les coordonnées du barycentre K des points $(I, 3)$ et $(J, 2)$.

Q4 Déterminer les coordonnées du barycentre L des quatre points $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 3)$ et $(D, -1)$. Que remarque-t-on ?

Quelques exercices supplémentaires

□ Exercice D12

Soit ABC un triangle, D le barycentre de $(A, 1), (B, 2), (C, 3)$, E le barycentre de $(A, 2), (B, 3), (C, 1)$ et F le barycentre de $(A, 3), (B, 1), (C, 2)$.

Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est aussi le centre de gravité du triangle DEF .

□ Exercice D13 (lieu de points)

A et B sont deux points distincts. On considère C le barycentre de $(A, 2)(B, 3)$ et D le barycentre de $(A, 3)(B, 2)$.

Q1 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$.

Q2 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$$

□ Exercice D14 (lieux de points)

Soit ABC un triangle.

Q1 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à \overrightarrow{BC}

Q2 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

□ Exercice D15

On considère un triangle ABC du plan .

Q1 a. Déterminer et construire le point G , barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$$

b. Déterminer et construire le point G' , barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A; 1); (B; 5); (C; -2)\}$$

Q2 a. Soit J le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB) .

b. Montrer que le barycentre I du système de points pondérés : $\{(B; 2); (C; -1)\}$ appartient à (GG') .

Q3 Soit D un point quelconque du plan et O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$. Déterminer trois réels a, b, c tels que K soit le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A; a); (D; d); (C; c)\}$$