

CHAPITRE

2



TSI₁

2025/2026

Géométrie plane : les bases

Dans ce chapitre, nous allons rappeler rapidement les notions de coordonnées, repères et bases avec un premier aperçu de la notion de changement de base. On finira par une brève incursion sur la notion bien pratique de barycentres.

Sommaire

I	Rappels et notations	2
II	Repérage dans le plan	2
II.1	Coordonnées cartésiennes	2
II.2	Changement de base	3
II.3	Affixes	3
II.4	Coordonnées polaires	3
III	Barycentres	4
III.1	Définition	4
III.2	Propriétés, coordonnées	5
IV	Rappels sur le cercle trigonométrique	6

I Rappels et notations

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires (on dit aussi *liés*) si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. (colinéaire signifie).
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires (dans ce cas on dit que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est *libre*) forment une *base* du plan vectoriel, c'est à dire que tout vecteur peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des deux vecteurs de base (on détaillera cela dans ce chapitre et dans un autre chapitre consacré à l'algèbre linéaire...)
- On note usuellement $Vect(\vec{u})$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$. On parle d'une *droite vectorielle*.
- Une *droite affine* est définie par un point et une direction.

□ ✎ Exercice D.1

II Repérage dans le plan

II.1 Coordonnées cartésiennes

♣ Définition II.1.1 (Repère)

Dans le plan, on considère un **repère** $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$, où O est un point du plan et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires.

À tout point M du plan on peut associer un unique couple (x, y) , appelé coordonnées cartésiennes de M , qui correspond à l'unique décomposition :

$$M(x, y) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Cette définition permet d'identifier le *plan affine* (constitué de points) à l'espace $\mathbb{R}^2$ (constitué de couples de réels).

Sur le même principe, on peut identifier le *plan vectoriel* (l'ensemble des vecteurs) à $\mathbb{R}^2$ en définissant :

♣ Définition II.1.2 (Base)

Dans le plan vectoriel, si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs **non colinéaires**, le couple $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé une **base**. De plus, à tout vecteur $\vec{u}$ on peut associer un unique couple (x, y) qui correspond à l'unique décomposition :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Propriété II.1.3

On considère le repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ et la base $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires.

Si dans $\mathcal{R}$, les points A et B ont pour coordonnées respectives $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

II.2 Changement de base

Exemple (II.2.1)

On considère un repère $\mathcal{R}_1 (O_1 ; \vec{i}, \vec{j})$ et un point O_2 dont les coordonnées dans $\mathcal{R}_1$ sont $O_{2/\mathcal{R}_1}(x_2, y_2)$. Si dans $\mathcal{R}_1$, un point M a pour coordonnées $M_{/\mathcal{R}_1}(x, y)$, quelles sont ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_2 (O_2 ; \vec{i}, \vec{j})$?

S1

☐ Exercice D.2

☐ Exercice D.3

☐ Exercice D.4

II.3 Affixes

Puisque le repérage se fait par des couples de réels, il est parfois astucieux d'utiliser des nombres complexes pour repérer un point ou un vecteur :

- On appelle *affixe* du point $M(x, y)$, le nombre complexe $z = x + iy$.
- On appelle *affixe* du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le nombre complexe $z = x + iy$.

Question : donner une condition nécessaire et suffisante sur z et z' pour que les vecteurs non nuls $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ soient colinéaires :

S2

☐ Exercice D.5

II.4 Coordonnées polaires

Tout point M peut être repéré par une distance et un angle. Plus précisément :

♪ Définition II.4.1

Dans le plan, on considère un **repère** $\mathcal{R} (O ; \vec{i}, \vec{j})$, où O est un point du plan et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires.

Tout point M peut être repéré par un angle θ (à 2π près) et une distance $\rho \geq 0$ telle que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\theta, \quad \text{avec } \vec{u}_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \rho = OM$$

Le couple (ρ, θ) est appelé **coordonnées polaires** du point M .

Faire une représentation graphique pour illustrer cette situation :



ATTENTION ! – Il faut savoir passer des coordonnées cartésiennes à polaires et réciproquement.

Pour cela, en notant $M(\rho, \theta)$ les coordonnées polaires et $M(x, y)$ les coordonnées cartésiennes de M , on peut utiliser les relations suivantes :

- Polaire $\rightarrow$ cartésiennes :

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta$$

- Cartésiennes $\rightarrow$ polaires :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta \text{ est solution du système } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

REMARQUES – On verra dans le chapitre sur les nombres complexes une autre relation pour déterminer l'angle θ :

$$\begin{cases} \text{si } x > 0, & \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \text{si } x < 0, & \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \\ \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, & \theta = \frac{\pi}{2} \\ \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0, & \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

☐ Exercice D.6

☐ Exercice D.7

III Barycentres

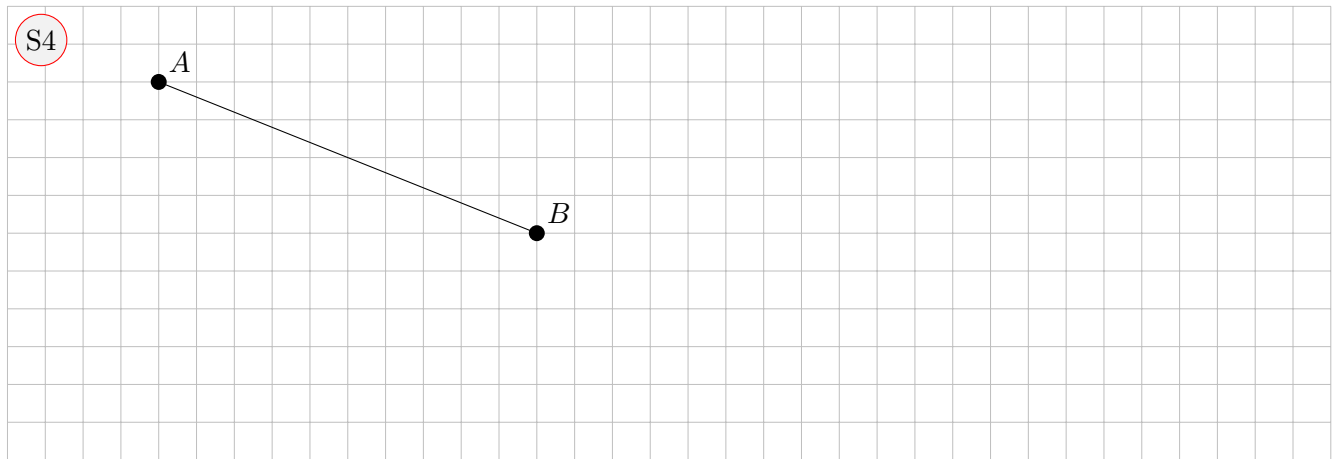
III.1 Définition

Propriété III.1.1 (et définition)

On appelle **barycentre** des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ pondérés par $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ l'unique point G vérifiant

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Voyons sur un exemple comment déterminer ce barycentre G : déterminer et placer le barycentre des points pondérés $(A; 3)$ et $(B; 2)$



REMARQUES – On ne change pas le barycentre si l'on multiplie les coefficients par un même nombre réel non nul.

On retiendra le cas particulier où tous les coefficients sont égaux. On parle dans ce cas d'**isobarycentre**. Encore plus particulièrement :

- L'isobarycentre de deux points A et B est le
- Le centre de gravité d'un triangle ABC est

III.2 Propriétés, coordonnées

Propriété III.2.1 (fondamentale)

Si M est un point quelconque du plan ou de l'espace, et G le barycentre des points pondérés $(A_1 ; a_1)$, $(A_2 ; a_2)$, ..., $(A_n ; a_n)$ alors :

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}$$

REMARQUES –

- En remplaçant M par le barycentre, on retrouve la définition.
- En remplaçant M par l'origine du repère on trouve directement les coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{a_1 \times x_{A_1} + a_2 \times x_{A_2} + \dots + a_n \times x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$y_G = \frac{a_1 \times y_{A_1} + a_2 \times y_{A_2} + \dots + a_n \times y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

☐ Exercice D.8

☐ Exercice D.9

☐ Exercice D.10

☐ Exercice D.11

IV Rappels sur le cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique à connaître parfaitement :

