D.15) Q1a. G vérifie : $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

ie $\vec{GA} = \vec{GB} - \vec{GC} \iff \vec{GA} = \vec{CB} \iff \underline{\underline{\vec{AG} = \vec{BC}}}$

Q1b On a : $\vec{G'A} + 5\vec{G'B} - 2\vec{G'C} = \vec{0}$

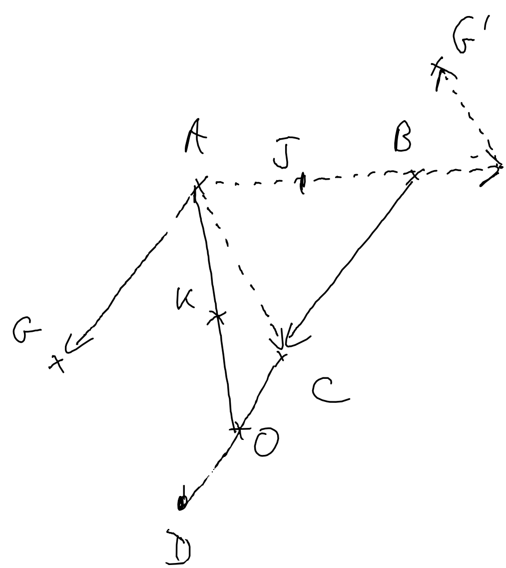
$\iff \vec{G'A} + 5(\vec{G'A} + \vec{AB}) - 2(\vec{G'A} + \vec{AC}) = \vec{0}$

$\iff 4\vec{G'A} + 5\vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{0}$

$4\vec{G'A} = -5\vec{AB} + 2\vec{AC}$

$\underline{\underline{\vec{AG'} = \frac{5}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}}}$

Dessin :



D/S Q2a. * $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'}$

$$= \overrightarrow{CB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{GG'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AB}}$$

* $\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AG'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

* On constate que $\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'}$, donc $J \in (GG')$.

Or $J \in (AB)$ donc J est le point d'intersectᵒⁿ de (AB) et (GG')

Q2b. $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\iff \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

Donc : faisons le m̂ raisonnᵗ qu'en Q2a :

$\overrightarrow{IG'} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{JG'}$

donc I, J, G' alignés.

Or $J \in (GG')$ donc $I \in (GG')$

DIS Q3

$$a\vec{KA} + d\vec{KD} + c\vec{KC} = \vec{0}$$

$$a\vec{KA} + d(\vec{KO} + \vec{OD}) + c(\vec{KO} + \vec{OC}) = \vec{0}$$

$$a\vec{KA} + (d+c)\vec{KO} + (c-d)\vec{OC} = \vec{0} \qquad (\text{car } \vec{OD} = -\vec{OC})$$

$$(a-(d+c))\vec{KA} + (c-d)\vec{OC} = \vec{0} \qquad (\text{car } \vec{KA} = -\vec{KO})$$

Donc $c = d$

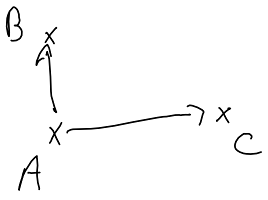
et $a - 2c = 0$

Ainsi $c = d = 1$ et $a = 2$ conviennent.

D'où $\boxed{K = \text{barycentre de } \{(A,2),(C,1),(D,1)\}}$

→ voir page suivante pour "version coordonnées" du DIS.

D15 Avec des coordonnées.



On introduit le repère $(A; \vec{AC}, \vec{AB})$

On a : $A(0,0)$ $B(0,1)$ $C(1,0)$

Q1 a et b. Avec la formule sur moyenne des coord : on trouve : $G(1;-1)$ et $G'\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

Q2a $J\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Alors $\vec{GG'}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-1 \\ \frac{5}{4}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{GG'} = -\frac{3}{2}\vec{AC} + \frac{9}{4}\vec{AB}$

et $\vec{JG'}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-0 \\ \frac{5}{4}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{JG'} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AB}$

On déduit $\vec{GG'} = 3\vec{JG'}$ d'où G, J, G' alignés.

Ainsi : $J \in (GG') \cap (AB)$ c'est le point d'intersection.

Q2b. On a $x_I = \frac{2\times 0 - 1\times 1}{1} = -1$ $\quad I(-1,2)$

$y_I = \frac{2\times 1 - 1\times 0}{1} = 2$

$\vec{IG}\begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{IG} = -\frac{4}{3}\vec{GG'}$

donc I, G, G' alignés ie $I \in (GG')$

Q3. Pour celle-là, le plus simple est de faire sans coordonnées (voir page préc.), sinon il faut introduire $D(x,y)$, donner les coord. de O, de K puis écrire K barycentre des 3 pts...

$O\left(\frac{1+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right)$ $\quad K\left(\frac{1+x}{4}, \frac{y}{4}\right)$

$$\begin{cases} \frac{1+x}{4} = \frac{a\times 0 + dx + c\times 1}{a+d+c} \\ \frac{y}{4} = \frac{a\times 0 + dy + c\times 0}{a+d+c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+x)(a+d+c) = 4(dx+c) \\ y(a+d+c) = 4dy \end{cases}$$

On cherche a, d, c qui marchent $\forall x, y$

d'où $a+d+c = 4$ (avec ligne 2)

et $(1+x)\times 4 = 4dx + 4c$

$4 + 4x = 4dx + 4c$ d'où $d = 1$, $c = 1$

et $a = 2$ conviennent.

$\boxed{K \text{ bary}((A,2),(D,1),(C,1))}$