

PLANCHE C

(IN)ÉQUATIONS POLYNOMIALES

□ Exercice C1 (sens de variation)

Déterminer les tableaux de variations des fonctions polynômes de degrés inférieur ou égal à 2, définies par les expressions :

$$f_1(x) = 3x - 1 \quad f_2(x) = -2x + 4 \quad f_3(x) = 2x^2 - 8x + 1 \quad f_4(x) = -3x^2 + 6x + 2$$

On utilisera les éléments caractéristiques de ces fonctions de référence, ou la dérivation...

□ Exercice C2 (forme canonique)

On considère les trinômes du second degré suivants :

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 3 \quad f_2(x) = -x^2 - 4x \quad f_3(x) = 2x^2 + 4x + 5$$

$$f_4(x) = 3x^2 - 6x - 2 \quad f_5(x) = x^2 - x + 1 \quad f_6(x) = x^2 + 3$$

Q1 Mettre chacune des fonctions précédentes sous forme canonique.

Q2 Donner alors les allures des courbes représentatives de chacune de ces fonctions et en préciser les extremums éventuels.

□ Exercice C3 (racines carrées)

Donner les racines carrées (réelles ou complexes) des nombres suivants :

$$A = 5 \quad B = -4 \quad C = k^2 - 2k + 1 \quad (\text{où } k \text{ est un réel quelconque}) \quad D = -5$$

□ Exercice C4 (racines)

Résoudre (dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$) les équations suivantes :

Q1 $3x^2 - 3x - 6 = 0$

Q2 $x^2 - 6x = -9$

Q3 $x^2 + x + 1 = 0$

Q4 $3x^2 + 4x = 3(x-1)(x+2)$

Q5 $2x^2 = 1$

Q6 $x^2 - 200x + 10 = 0$

Q7 $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Q8 $-2x^4 + x^2 + 1 = 0$

Q9 $\frac{3}{x} + 2x = 1$

Q10 $(x-2)(x+\sqrt{3}) = 0$

Q11 $(x+1)(x-1) = -1$

□ Exercice C5

Soit $f(x) = -8x^2 + 2x + 3$ dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative.

Q1 Résoudre l'équation $f(x) = 3$. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{C}_f$.

Q2 Dresser le tableau de variation de f .

Q3 Écrire $f(x)$ sous forme canonique.

Q4 Donner la forme factorisée de $f(x)$.

□ Exercice C6

Existe-t-il une fonction polynomiale du second degré telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(-1) = 1$? Si c'est le cas, la déterminer.

□ Exercice C7

On admet que $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution positive de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ (E)

En réinjectant φ dans (E), calculer φ^2 et $\frac{1}{\varphi}$ (uniquement à l'aide de (E)).

□ Exercice C8

Déterminer, selon la valeur du nombre réel m , le nombre de solutions des équations suivantes :

Q1 $2x^2 - mx - m^2 = 0$

Q2 $mx^2 + 2(2m + 1)x + 1 = 0$

□ Exercice C9**Partie 1**

Bob aime bien sauter dans l'eau depuis des falaises de plus en plus hautes. Il aimerait pouvoir facilement estimer la hauteur de son plongeon. Pour cela, un simple chronomètre et un peu de physique vont être suffisants. En effet, il a appris pendant le cours de physique qu'un corps en chute libre parcourt une distance d en fonction du temps donnée par : $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où g est l'accélération de pesanteur $g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Q1 Comment Bob doit-il s'y prendre ?

Estimer la hauteur du plongeon effectué par Bob sur la vidéo.

Q2 Quel doit-être la durée de son plongeon s'il saute d'une hauteur de 15 m ?**Partie 2**

Sur le même principe, Alice souhaite mesurer la profondeur d'un puits. Elle lâche un cailloux et mesure le temps qui s'écoule avant d'entendre le "plouf". Elle a chronométré $T = 6 \text{ s}$. Contrairement à la situation de Bob qui pouvait mesurer directement le temps de chute, cette fois-ci il faudra tenir compte (surtout si le puits est profond) du temps mis par le son pour remonter aux oreilles d'Alice. Voilà comment procéder :

On notera p la profondeur inconnue de ce puits.

Q1 On appelle t_1 le temps de chute de la pierre. En se servant des données physiques de la partie 1, exprimer p en fonction de t_1 .**Q2** Pour remonter à la surface, le son met un temps t_2 . La vitesse du son est de 340 m.s^{-1} . Exprimer p en fonction de t_2 .**Q3** En déduire une relation entre t_1 et t_2 .**Q4** Sachant que $t_2 = 6 - t_1$ montrer que t_1 est solution de l'équation : $9,8t^2 + 680t - 4080 = 0$ **Q5** Quelle est finalement la profondeur du puits ?**□ Exercice C10 (relations entre racines)**

Sans utiliser de discriminant, déterminer les racines des trinômes suivants (trouver une racine évidente puis déterminer l'autre grâce aux relations entre les racines) :

$$A(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{et} \quad B(x) = 2x^2 + x - 1$$

□ Exercice C11 (signe d'un trinôme)

Déterminer le tableau de signe complet des trinômes suivants :

$$f_1(x) = x^2 - 6x - 7 \quad f_2(x) = x^2 - 20x + 100 \quad f_3(x) = x^2 - 25x + 156$$

$$f_4(x) = 2x^2 + 11x - 21 \quad f_5(x) = -9x^2 + 6x - 5$$

□ Exercice C12

Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + x + 5$

□ Exercice C13

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Q1 $(-2x^2 - 4x - 8)(x^2 + 5x - 14) \leq 0$

Q2 $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$

Q3 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \geq 0$

□ Exercice C14 (degré 3)

On s'intéresse à l'équation $(E) : 3x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$.

Q1 Conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) et proposer une solution *évidente*.

Q2 Trouver des réels a , b et c tels que $3x^3 + x^2 - 5x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Q3 En déduire les solutions de (E) .

□ Exercice C15

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = -6x^3 + 17x^2 - 14x + 3 \quad f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \quad f_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$$

□ Exercice C16

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ et $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$. Étudier les positions relatives des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé du plan.