CHAPITRE

C

TSI$_1$

2025/2026

(In)équations polynomiales

Sommaire

I Un problème d'introduction 1 **2**

II Fonction polynôme de degré 2 **2**
II.1 Définition . . . 2
II.2 Représentation graphique . . . 3
II.3 Sens de variation . . . 3
II.4 Forme canonique . . . 4

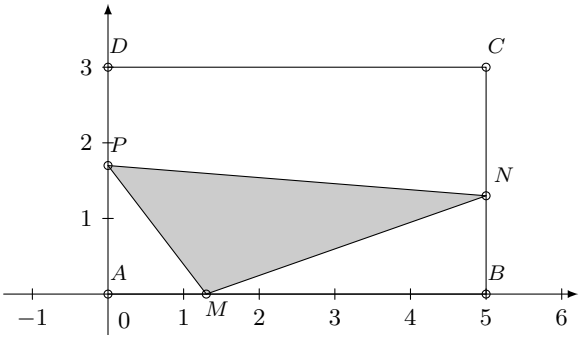
III Équation du second degré **5**
III.1 Notion de racines . . . 6
III.2 Forme factorisée . . . 7
III.3 Relation entre les racines . . . 7

IV Inéquations du second degré **8**
IV.1 Petit problème d'introduction 2 . . . 8
IV.2 Forme factorisée . . . 9
IV.3 Signe d'un trinôme . . . 9

V Cas des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 **10**
V.1 Racines . . . 10
V.2 Factorisation d'une fonction polynôme de degré 3 . . . 11

I Un problème d'introduction 1

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $BC = 3$. On place les points M, N, P respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[DA]$, de telle sorte que les longueurs AM, BN et DP soient égales.



Q 1 On souhaite déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ de telle sorte que l'aire du triangle MNP soit minimale.
Sans résoudre complètement la problème (on le fera plus loin…), donner la méthode à suivre :

S1

Conclusion : il s'agit ici de déterminer les .....

Q 2 Est-il possible de positionner M tel que l'aire soit égale à 4,5 ? et à 2,5 ?
Sans résoudre le problème donner la méthode à suivre :

S2

Conclusion : il s'agit ici de déterminer les .....

II Fonction polynôme de degré 2

II.1 Définition

♪ Définition II.1.1

- On appelle *fonction polynôme de degré n* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où les coefficients a_n, …a_0 sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$.

- Une *fonction polynôme de degré 2* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarques –

- Une fonction affine est une fonction polynôme de degré .....
- Une fonction constante est une fonction polynôme de degré .....
- Pour les fonctions polynôme de degré 2 on parle souvent de ..... du second degré.

II.2 Représentation graphique

♪ Définition II.2.1

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthonormé est appellée une *parabole*.

Remarques – Les antennes qui permettent de recevoir la télévision par satellite, appelées par abus de langage « paraboles » sont en fait des *paraboloïdes de révolution* qui sont obtenus en faisant tourner une parabole autour de son axe de symétrie.

A faire : représenter la fonction définie par $x \mapsto x^2 - 8x + 15$.

S3

II.3 Sens de variation

A faire : Donner le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x) = (1-x)^2 + 2$.

S4

Dans la suite, grâce à la propriété suivante, si on le souhaite, on pourra donner les variations d'un trinôme du second degré directement, sans utiliser la dérivation :

Propriété II.3.1

La parabole représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un *sommet* S d'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$, un *axe de symétrie vertical* d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ et admet en ce sommet une tangente *horizontale*. Les variations sont données par les tableaux suivants :

S5

Dans la question 1 du problème d'introduction 1, on devait trouver pour quelle valeur de x la fonction $a(x) = x^2 - 4x + 7.5$ était minimale. Déterminer cette valeur :

S6

☐ ✍ **Exercice C.1**

On va voir dans le paragraphe suivant comment la *forme canonique* du trinôme permettra de retrouver ces renseignements.

II.4 Forme canonique

En fait, il est inutile d'utiliser des outils aussi performants que la dérivation pour étudier les variations d'un trinôme du second degré. Il suffit de mettre son expression sous une forme *astucieuse* pour conclure.

Exemple – On considère la fonction du second degré $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Q 1 En remarquant que cette expression commence comme une égalité remarquable bien connue, trouver deux nombres α et β tels que $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$:

S7

Q 2 Donner alors l'allure de la représentation graphique de f en précisant bien les coordonées du sommet :

S8

♪ Définition II.4.1 (forme canonique)

Pour toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on peut trouver deux réels α β tels que pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Cette dernière écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Preuve

S9

□

Remarques – On retiendra que la forme canonique permet d'obtenir facilement les variations et les extremums d'une fonction du second degré.

□ ✍ **Exercice C.2**

III Équation du second degré

On va voir dans ce paragraphe que cette même forme canonique va nous permettre de déterminer les solutions d'équations du second degré.

III.1 Notion de racines

♪ Définition III.1.1 (Racine carrée)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle *racine carrée de a* tout nombre réel (ou complexe) A tel que $A^2 = a$.

Remarques –

- Un nombre réel $a > 0$ admet toujours deux racines carrées distinctes opposées. On note par convention $\sqrt{a}$ la racine carrée *positive* de a.
- Le réel 0 admet une seule racine carrée (elle est dite double) qui vaut 0.
- Un nombre réel $a < 0$ n'admet pas de racines carrées réelles, mais il admet deux racines carrées complexes conjuguées qui sont $A_1 = i\sqrt{|a|}$ et $A_2 = -i\sqrt{|a|}$.

☐ ✍ **Exercice C.3**

♪ Définition III.1.2 (équation du second degré)

Une équation du second degré, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.
Les solutions d'une telle équation sont appelées les *racines* du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple – Résoudre à l'aide de la forme canonique l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$:

S10

Pour éviter de refaire à chaque fois ce même type de calcul, on va utiliser une méthode plus directe, basée sur des formules et la notion de discriminant.

♪ Définition III.1.3 (Discriminant)

On appelle *discriminant* du trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ le nombre réel noté Δ défini par $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Propriété III.1.4 (Solution équation second degré)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, et Δ son discriminant. Notons δ une racine carrée de Δ.

- Si $\Delta = 0$, f admet une seule racine : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ *(c'est l'abscisse du sommet de la parabole car elle est tangente à l'axe des abscisses)*
- Si $\Delta > 0$, f admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ *(les deux racines sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$)*

- Si $\Delta < 0$, f admet deux racines complexes conjuguées : $x_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ *(attention δ est ici un nombre complexe imaginaire pur de la forme $i\sqrt{|\Delta|}$)*

REMARQUES – Dans tous les cas, les racines du trinôme ax^2+bx+c sont données par :

$$x = \frac{-b \pm \delta}{2a} \quad \text{où } \delta \text{ est une racine carrée du discriminant } \Delta = b^2 - 4ac$$

Preuve

S11

□

Dans la question 2 du problème d'introduction 1, on devait trouver les solutions de l'équation $a(x) = 2,5$ et $a(x) = 4,5$. Déterminer ces solutions :

S12

□ ✍ **Exercice C.4** □ ✍ **Exercice C.5** □ ✍ **Exercice C.6** □ ✍ **Exercice C.7**
□ ✍ **Exercice C.8** □ ✍ **Exercice C.9**

III.2 Forme factorisée

La connaissance des racines d'un trinôme du second degré permet d'obtenir sa forme factorisée, qui en plus de donner les racines nous permettra d'étudier le signe du trinôme...(voir plus loin)

III.3 Relation entre les racines

Il existe des formules générales liant les coefficients et les racines d'une fonction polynomiale. Dans le cas d'un trinôme du second degré cela donne :

Propriété III.3.1 (relation entre les racines)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré de racines x_1 et x_2 (réelles ou complexes, éventuellement confondues). On a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Preuve

S13

□

□ ✍ **Exercice C.10**

IV Inéquations du second degré

IV.1 Petit problème d'introduction 2

Une entreprise fabrique chaque jour une quantité de x objets, $x \in [0, 60]$. Le coût de production de la fabrication de ces objets, exprimé en euros, est donné par $C(x) = x^2 - 20x + 200$. Le prix de vente d'un objet est 34 €.

Q 1 Déterminer le bénéfice B en fonction de x. Comment varie ce bénéfice ? Pour quelle valeur de x est-il maximal ?

S14

Q 2 On souhaite savoir pour quelle quantité d'objets ce bénéfice est positif.

Répondre à cette question revient à étudier .....

À noter : on a déjà vu que la *bonne* forme pour étudier le signe d'une expression est *la forme factorisée*.

IV.2 Forme factorisée

Propriété IV.2.1 (forme factorisée d'un trinôme)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme du second degré de discriminant Δ. En fonction du signe de Δ la forme factorisée du trinôme est :

- Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les deux racines distinctes : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$, en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, on ne peut pas, dans $\mathbb{R}$, factoriser davantage le trinôme.

IV.3 Signe d'un trinôme

Propriété IV.3.1 (signe d'un trinôme)

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un trinôme du second degré de discriminant Δ :

- Si $\Delta < 0$ le trinôme $f(x)$ est strictement du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ le trinôme $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et s'annule en un point.
- Si $\Delta > 0$ le signe du trinôme $f(x)$ est donné par le tableau (x_1 et x_2 sont les deux racines réelles) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

On pourra retenir cette propriété en disant de façon un peu abusive que dans tous les cas :

le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de « a » à l'extérieur des racines.

Preuve

S15

□

Dans la question 2 du problème d'introduction 2, on devait déterminer les valeurs de x qui rendaient la fonction $B(x) = -x^2 + 54x - 200$ positive. Déterminer ces valeurs :

S16

☐ ✍ **Exercice C.11** ☐ ✍ **Exercice C.12** ☐ ✍ **Exercice C.13**

V Cas des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

On rappelle qu'une fonction polynôme de degré 3 s'écrit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$.

V.1 Racines

Propriété V.1.1

Toute fonction polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Preuve

On développera ce sujet dans un chapitre consacré aux polynômes en fin d'année, mais pour l'instant, on utilisera des résultats connus d'analyse pour démontrer ce résultat :

S17

□

Remarques – Il existe des formules historiques qui permettent dans certains cas de déterminer algébriquement tous les racines d'un polynôme de degré 3 (on en reparlera un peu en introduction du chapitre sur les nombres complexes) mais elles n'ont plus vraiment d'utilité dans notre monde numérique moderne, et elles ne sont pas au programmes !

V.2 Factorisation d'une fonction polynôme de degré 3

☺ Théorème V.2.1 (Factorisation)

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est une fonction polynôme de degré 3 ($a \neq 0$), en notant x_0 une de ses racines, il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$f(x) = (x - x_0)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

On dit que l'on a factorisé f par $(x - x_0)$.

REMARQUES – Le deuxième facteur étant du second degré, il faudra voir s'il se factorise ou pas…

MÉTHODE – Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$ une fonction polynôme de degré 3. Pour factoriser f on effectue les étapes suivantes :

1. On commence par chercher une racine « évidente » x_0, c'est à dire un nombre vérifiant $f(x_0) = 0$. Celle-ci peut être donnée par l'énoncé, ou trouvée par calcul mental ou encore avec sa calculatrice…
2. On écrit alors $f(x) = (x - x_0)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ où α, β et γ sont des nombres à déterminer.
3. Pour cela on développe cette dernière expression et on détermine les réels α, β et γ à l'aide d'un petit système obtenu en identifiant les coefficients des deux expressions de f.
4. On regarde ensuite si l'on peut factoriser le trinôme $\alpha x^2 + \beta x + c$.
5. On donne enfin l'expression factorisée de f.

EXEMPLE – Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. Après avoir calculé $f(2)$, déterminer l'expression factorisée de f, puis donner son tableau de signe.

S18

☐ ✍ **Exercice C.14** ☐ ✍ **Exercice C.15** ☐ ✍ **Exercice C.16**