

(BIS) Q1. A et B est positif, la
fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,

donc :

$$\underline{A \leq B \Leftrightarrow A^2 \leq B^2}$$

$$\begin{aligned} \underline{Q2} \quad B^2 - A^2 &= (|x| + |y|)^2 - |x+y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= \underbrace{|x|^2 - x^2} + \underbrace{2|x||y| - 2xy} + \underbrace{|y|^2 - y^2} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\underline{Q3} \quad \text{On } \overbrace{B^2 - A^2}^{+} = (B-A) \overbrace{(B+A)}^{+}$$

et $B+A$ est $(+)$.

On déduit que $B-A \geq 0$

$$\textcircled{\text{ip}} \quad B \geq A.$$

$$\textcircled{\text{ip}} \quad \boxed{|x| + |y| \geq |x+y|}$$

(ou bien on applique direct Q1)

(B16) On veut montrer que $||x|-|y|| \leq |x-y|$

(i.e) $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$

$$* |x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$$

d'où $|x|-|y| \leq |x-y|$

$$* |y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x|$$

d'où $|y|-|x| \leq |y-x| \leq |x-y|$

d'où $|x|-|y| \geq -|x-y|$

$\hookrightarrow x \neq y$