

CHAPITRE



TSI₁

2025/2026

Un soupçon de logique

Sommaire

I Proposition/assertion	2
I.1 Définition	2
I.2 Conjonction (ET)	2
I.3 Disjonction (OU)	2
II Implication	3
II.1 Implication	3
II.2 Équivalence	4
II.3 Réciproque et contraposée	4
III Quantificateurs	5
III.1 Universel : « quel que soit »	5
III.2 Existenciel : « il existe »	6
IV Négation	6

I.1 Définition

Une **proposition** (on dit aussi une *assertion*) est un énoncé (mathématique) qui peut prendre deux valeurs : VRAI ou FAUX

EXAMPLE –

« un rectangle est un carré » est une proposition

À faire : donner la table de vérité du connecteur logique "NON" :

I.2 Conjonction (ET)

Soit P et Q deux propositions. On appelle **conjonction** de P et Q la proposition notée $\boxed{P \text{ ET } Q}$ qui vaut VRAI si et seulement si à la fois P et Q valent VRAI.

À faire : donner la table de vérité du connecteur logique "ET" :

I.3 Disjonction (OU)

Soit P et Q deux propositions. On appelle **disjonction** de P et Q la proposition notée $\boxed{P \text{ OU } Q}$ qui vaut VRAI si et seulement si l'une au moins des proposition P ou Q vaut VRAI.

EXEMPLE – Si $P(x)$ est l’assertion « x admet au moins une racine carrée réelle », alors :

- « $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$ » est une proposition
- « $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x)$ » est une proposition

III.2 Existenciel : « il existe »

♪ Définition III.2.1 (Quantificateur *existenciel*)

Le symbole $\exists$ se traduit en français par "*il existe*". Par exemple, si P est une proposition dépendant d’un paramètre x , on écrit

$$\exists x \in E, P(x)$$

pour dire que la proposition

$$P(x) \text{ est vraie pour au moins un élément } x \text{ de } E$$

EXEMPLE – Si $P(x)$ est l’assertion « x admet au moins une racine carrée réelle », alors :

- « $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$ » est une proposition
- « $\exists x \in \mathbb{Z}, P(x)$ » est une proposition

ATTENTION ! – Dans une proposition logique, l’**ordre** des quantificateurs est très important. Il est en effet clair que les deux phrases suivantes sont différentes :

- Chez moi, quel que soit le jour, il existe une heure où il peut,
- Chez moi, il existe une heure, où quel que soit le jour il pleut.

IV Négation

- Soit P et Q deux propositions. Alors :

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff [(\text{non } P) \text{ ET } (\text{non } Q)]$$

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \iff [(\text{non } P) \text{ OU } (\text{non } Q)]$$

- Négation d’une implication :

$$\text{non}(P \implies Q) \iff \text{non}(\text{non}(P) \text{ OU } Q) \iff [P \text{ ET } (\text{non } Q)]$$

- Négation avec quantificateurs :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \text{non}(P(x))$$

$$\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \text{non}(P(x))$$

Exemple (IV.0.1)

Trouver des exemples pour illustrer chacune des équivalences précédentes