CHAPITRE

$\mathscr{A}\ \mathscr{C}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Dénombrement

Sommaire

I Retour sur les ensembles, mais de cardinal fini

On va reprendre ici rapidement les notions vues dans le chapitre N « Ensembles / applications », mais dans le cadre des ensembles contenant un nombre **fini** d'éléments.

I.1 Cardinal

♪ Définition I.1.1

Soit A un ensemble fini. On note $Card(E)$, ou encore $|E|$ le nombre d'éléments contenus dans E. Dans le cas particulier où E est vide, on pose $Card(\emptyset) = 0$.

I.2 Inclusion, égalité

♪ Définition I.2.1

Soit E et F deux ensembles.

- On dit que E est **inclus** dans F, ou que E est une partie de F et on note $E \subset F$ lorsque :

$$\forall x \in E, \quad x \in F$$

- On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Propriété I.2.2

Soit E est un ensemble fini et A tel que $A \subset E$ alors :

- A est aussi fini et $Card(A) \leqslant Card(E)$
- En particulier on a : $A = E \iff Card(A) = Card(E)$

I.3 Opérations sur les ensembles

♪ Définition I.3.1 (Intersection)

Soit E et F deux ensembles. $E \cap F$ s'appelle l'**intersection** des ensembles E et F, et représente l'ensemble des éléments à la fois dans E et dans F :

$$\boxed{x \in E \cap F \iff (x \in E \text{ et } x \in F)}$$

♪ Définition I.3.2 (Union)

$E \cup F$ s'appelle la **réunion** des ensembles E et F, et représente l'ensemble des éléments dans E ou dans F :

$$\boxed{x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ ou } x \in F)}$$

(On rappelle que le « ou » est inclusif en mathématiques...)

Définition I.3.3 (Complémentaire)

Soit E et F deux ensembles. Lorsque $F \subset E$ l'ensemble $E \backslash F$ s'appelle le **complémentaire** de F dans E et se note $\complement_E F$ ou encore souvent $\overline{F}$.

Définition I.3.4 (Produit)

Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et F, est l'ensemble noté $E \times F$, des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) \ / \ x \in E \text{ et } y \in F\}$$

On peut généraliser ce procédé à n ensembles, et en particulier l'ensemble $E * E * \cdots * E$ se note E^n.

Propriété I.3.5 (Règles)

- Associativité : $\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$
- Distributivité : $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ et $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}(\star)$
- 2 équivalences :

$$\boxed{A \subset B \overset{①}{\Longleftrightarrow} A \cup B = B \overset{②}{\Longleftrightarrow} A \cap B = A}$$

- Avec les complémentaires :

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$$

Propriété I.3.6 (Cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis. Notons A et B des parties (sous-ensembles) de E. On a :

- $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
- $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$
- $Card(E * F) = Card(E) * Card(F)$ et en particulier $Card(E^p) = (Card(E))^p$

I.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition I.4.1

Soit E un ensemble. L'**ensemble des parties** de E se note $\mathscr{P}(E)$, et vérifie :

$$F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E$$

On peut écrire : $\mathscr{P}(E) = \{F \ / \ F \subset E\}$

Exemple – Comptons (dénombrons) le nombre de parties d'un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ de cardinal 4 :

- Nombre de parties à 0 éléments : ....
- Nombre de parties à 1 éléments : ....

  S1

- Nombre de parties à 2 éléments : ....

  S2

- Nombre de parties à 3 éléments : ....

  S3

- Nombre de parties à 4 éléments : ....

  S4

- Total : ....

On retiendra plus généralement la formule du théorème suivant :

☺ **Théorème I.4.2**

Si E est un ensemble fini on a :

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)}$$

On verra un peu plus de résultats concernant les parties d'un ensemble un peu plus loin dans la section « dénombrement ».

I.5 Applications et cardinal

On rappelle :

♩ **Définition I.5.1 (Application)**

Une **application** f de E dans F est un protocole qui à tout élément x de E associe un unique élément $f(x)$ de F appelé image de x par f.
E est appelé **ensemble de départ**, F **ensemble d'arrivée**.
On écrit :

$$f: \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

On appelle *graphe* (ou représentation graphique) de f la partie de $E \times F$ égale à $\{(x, f(x))/x \in E\}$.
Notation : l'ensemble des applications de E dans F se note $\boxed{\mathscr{F}(E, F)}$, ou encore $\boxed{F^E}$.

♪ Définition I.5.2 (Injectivité)

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On dit qu'elle est **injective** si elle vérifie l'une des deux assertions équivalentes suivantes :

- Tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f.
- On a : $\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

♪ Définition I.5.3 (Surjectivité)

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On dit qu'elle est **surjective** si elle vérifie l'une des deux assertions équivalentes suivantes :

- Tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f.
- On a : $\forall y \in F,\ \exists x \in E\ y = f(x)$.

Propriété I.5.4 (lien avec le cardinal)

Soit E et F deux ensembles, et f une application de E dans F :

- Si F est fini et f est injective on a :
$$E \text{ est fini et } Card(E) \leqslant Card(F)$$
- Si E est fini et f est surjective on a :
$$F \text{ est fini et } Card(E) \geqslant Card(F)$$
- Si E ou F est fini et f bijective on a :
$$E \text{ et } F \text{ finis et } Card(E) = Card(F)$$

☺ Théorème I.5.5

Soit E et F deux ensembles finis tels que $Card(E) = Card(F)$, et f une application de E dan s F. Alors on a :

$$\boxed{f \text{ injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective}}$$

II Dénombrement

II.1 Les p-uplets

♪ Définition II.1.1 (p-uplet)

On appelle p-uplet (ou encore p-liste) de A, tout élément de A^p, c'est à dire tout élément de la forme $(a_1, \dots, a_p)$ avec $a_i \in A$, $i \in [\![1;p]\!]$.

REMARQUES – on tient compte de l'ordre des éléments !

Propriété II.1.2

Le nombre de p-uplets d'éléments (**non nécessairement distincts**) choisis dans un ensemble de cardinal n est : n^p.
C'est une autre façon de parler de la formule $Card(E^p) = (Card(E))^p$.

EXEMPLE – Il existe des outils python pour dénombrer tous les p-uplets :

```python
import itertools

A = ['a','b','c']
L = []

for x in itertools.product(A,repeat=2):
    L.append(x)

# (avec elements non necessairement distincts)
print("nombre de p-uplets:",len(L))
print(L)
# sortie :
nombre de p-uplets : 9
[('a', 'a'), ('a', 'b'), ('a', 'c'),
 ('b', 'a'), ('b', 'b'), ('b', 'c'),
 ('c', 'a'), ('c', 'b'), ('c', 'c')]
```

Question : On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire **successivement** et **avec** remise trois boules. Combien y a-t-il de triplets résultats possibles ?

S5

Question : Combien existe-t-il de numéros de téléphone à 10 chiffres :

1. si l'on ne pose aucune contrainte ?

2. si l'on considère qu'un numéro commence par 0 ?

3. si l'on ne compte que les numéros de fixes commençant par 01, 02, 03, 04 et 05 ?

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

S6

☺ Théorème II.1.3

Le nombre de p-uplets d'éléments **distincts** choisis dans un ensemble E de cardinal n vaut :

- 0 si $p > n$.
- $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ si $p \leqslant n$.

(On parle parfois du nombre d'arrangements de p éléments de E)

Exemple – Il existe des outils python pour dénombrer tous les p-uplets dont les éléments sont choisis distincts :

```
import itertools

A = ['a','b','c','d']
L = []

for x in itertools.permutations(A,2):
    L.append(x)

# elements choisis distincts
print("nombre de p-uplets : ",len(L))
print(L)
# sortie :
nombre de p-uplets : 12
[('a', 'b'), ('a', 'c'), ('a', 'd'), ('b', 'a'),
 ('b', 'c'), ('b', 'd'), ('c', 'a'), ('c', 'b'),
 ('c', 'd'), ('d', 'a'), ('d', 'b'), ('d', 'c')]
```

Question : On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire **successivement** et **sans** remise trois boules. Combien y a-t-il de triplets résultats possibles ?

S7

Dans le cas particulier où $n = p$ on parle de **permutations** :

♪ Définition II.1.4 (Permutations)

Si $Card(A) = n$, on appelle **permutation** de A tout n-uplet d'éléments distincts choisis dans A.

Propriété II.1.5

Si $Card(A) = n$ alors le nombre de permutations de A est égal à $n!$.

Question : Dénombrer les mots de 5 lettres écrits avec les lettres V, A, C, H et E tels que chaque lettre est utilisée exactement une fois ?

S8

II.2 Les parties

♪ Définition II.2.1 (Combinaisons)

Si $Card(A) = n$ et si $p \leqslant n$, alors un sous-ensemble de A de cardinal p est appelé une **combinaison** de A à p éléments (ou p-combinaison de A, ou une partie à p éléments de A).

Exemple – Soit $A = \{a, b, c\}$. Lister successivement les p-combinaisons de A pour $p = 0, 1, 2, 3$:

S9

☺ Théorème II.2.2

Soit $p \leqslant n$. Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (c'est-à-dire le nombre de p-combinaisons de A) est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriété II.2.3

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal au nombre de parties à $n-p$ éléments d'un ensemble à n éléments. Ainsi on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

Propriété II.2.4

Le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est égal à la somme du nombre de parties à 0 éléments, du nombre de parties à 1 élément, du nombre de parties à 2 éléments, ..., du nombre de parties à n éléments :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Preuve

On a déjà vu ce calcul à l'aide du binôme de Newton ;-) □

Propriété II.2.5

On rappelle la formule de Pascal :

$$\forall (p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Preuve

Soit A un ensemble à n éléments, et $a_1 \in A$.
$\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments dans A. L'ensemble de ces parties est l'union disjointe des parties de A à p éléments ne contenant pas a_1 et des parties de A à p éléments contenant a_1:

- Le nombre de parties de A à p éléments ne contenant pas a_1 est $\binom{n-1}{p}$.
- Le nombre de parties à p éléments contenant a_1 est $\binom{n-1}{p-1}$.

□

Exemple – Il existe des outils python pour lister toutes les parties d'un ensemble :

```
import itertools
A = ['a','b','c','d']
L = []

for x in itertools.combinations(A,2):
    L.append(x)

print("nombre de parties :",len(L))
print(L)

#sortie :
nombre de parties : 6
[('a', 'b'), ('a', 'c'), ('a', 'd'),
('b', 'c'), ('b', 'd'), ('c', 'd')]
```

II.3 Extrait documentation itertools

Itérateurs combinatoires :

Itérateur	Arguments	Résultats
`product()`	p, q, ... [repeat=1]	produit cartésien, équivalent à une boucle *for* imbriquée
`permutations()`	p[, r]	*n*-uplets de longueur r, tous les ré-arrangements possibles, sans répétition d'éléments
`combinations()`	p, r	*n*-uplets de longueur r, ordonnés, sans répétition d'éléments
`combinations_with_replacement()`	p, r	*n*-uplets de longueur r, ordonnés, avec répétition d'éléments

Exemples	Résultats
`product('ABCD', repeat=2)`	`AA AB AC AD BA BB BC BD CA CB CC CD DA DB DC DD`
`permutations('ABCD', 2)`	`AB AC AD BA BC BD CA CB CD DA DB DC`
`combinations('ABCD', 2)`	`AB AC AD BC BD CD`
`combinations_with_replacement('ABCD', 2)`	`AA AB AC AD BB BC BD CC CD DD`

III Exercices

☐ ✍ **Exercice AC.1**

Q 1 Démontrer la formule : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

Q 2 En déduire la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

Q 3 Retrouver ce résultat en dérivant la fonction $f(x) = (1+x)^n$

☐ ✍ **Exercice AC.2**

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages possibles ? Combien de tirages contiennent deux carrés ?

☐ ✍ **Exercice AC.3**

On doit organiser des matchs entre $2n$ équipes de volley. Chaque équipe doit jouer un match. On note u_n le nombre de possibilités différentes. Montrer que $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

☐ ✍ **Exercice AC.4**

On considère les mots de 3 lettres formés sur notre alphabet latin à 26 lettres.
Déterminer le nombre de mots de 3 lettres :

Q 1 En tout

Q 2 deux à deux distinctes

Q 3 ayant exactement deux lettre identiques

Q 4 commençant par une voyelle et finissant par une consonne

Q 5 contenant deux consonnes identiques et une voyelle

Q 6 contenant au moins une consonne

Q 7 contenant au moins (une consonne et une voyelle)

☐ ✍ Exercice AC.5

Q 1 Quel est le nombre d'anagrammes du mot orange ?

Q 2 Quel est le nombre d'anagrammes du mot ananas ?

☐ ✍ Exercice AC.6

On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Q 1 Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Q 2 Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

a. 5 carreaux ou 5 cœurs ;

b. 2 cœurs et 3 piques ;

c. au moins 1 roi ;

d. au plus 1 roi ;

e. un brelan ;

f. un full ;

Pour les curieux : voir la page Internet dénombrer les mains au poker (Paul Milan)

☐ ✍ Exercice AC.7

On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

Q 1 On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes. De combien de façons peut-on les ranger ?

Q 2 On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.

a. De combien de façons peut-on les ranger ?

b. De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleur ?

c. Même question mais seules les rouges doivent être groupées.

☐ ✍ Exercice AC.8

Une assemblée est constituée de n individus ($n \in N^*$). Pour simplifier, on suppose qu'une année est constituée exactement de 365 jours (autrement dit qu'il n'y a pas d'année bissextile).

Q 1 Déterminer la probabilité p_n pour que (au moins) deux personnes de l'assemblée aient leur anniversaire le même jour sans forcément être née la même année.

Q 2 Déterminer le rang n_0 à partir duquel la probabilité p_n est plus grande que 0.5 (i.e. 50% de chance).

Q 3 Déterminer le rang n_1 à partir duquel la probabilité p_n est plus grande que 0.99.