

# Programme de colle 30

(01/06/2026 - 05/06/2026)

## 1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

### Chapitre Z : Applications linéaires

- Définitions, noyau, image
- Bases et applications linéaires (détermination d'une application linéaire par l'image d'une base) (pas encore d'interprétation matricielle)

### Chapitre AA : Dimension finie

- Notion de dimension

- Somme de sev et dimension (somme directe, Grassman)
- Applications linéaire en dimension finie (rang, th. du rang)
- Rang d'une matrice
- Caractérisation inj/surj/bij en dim finie
- (Pas encore de changement de base)

## 2 Pratique calculatoire :

Pour chacune des applications linéaires suivantes, donner sa matrice dans le couple de bases canoniques :

$$\text{Q1 } f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$$

$$\text{Q2 } f_2 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \longmapsto (X^2 + 1)P'' + 3XP' - P$$

$$\text{Q3 } f_3 : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto AV$$

(pour  $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  fixé).

## 3 Exercices/questions à préparer

### □ Exercice 1 (À préparer)

On se place dans  $E = \mathbb{R}^4$  et on pose :

- $u_1 = (1, 2, 0, 1), u_2 = (2, 1, 3, 1), u_3 = (2, 4, 0, 2)$
- $v_1 = (1, 2, 1, 0), v_2 = (-1, 1, 1, 1), v_3 = (2, -1, 0, 1)$

Q1 Déterminer  $\text{rg}(u_1, u_2, u_3), \text{rg}(v_1, v_2, v_3)$  ainsi que des bases de

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \text{ et } G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3).$$

Q2 Déterminer les dimensions ainsi que des bases de  $F \cap G$  et de  $F + G$ .

### □ Exercice 2

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit :  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$  définie par :

$$(x', y', z') = f(x, y, z, t) \iff \begin{cases} x' = x + 4y - 2z \\ y' = -x - 3y + 3z + t \\ z' = x + y - 5z + \lambda t \end{cases}$$

Q1 Déterminer une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

Q2 Sans calculs, dire si  $f$  est injective.

Q3  $f$  est-elle surjective ?

Q4 Déterminer le noyau de  $f$ .

---

**□ Exercice 3 (À préparer)**

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $w_1 = (1, -2, 0)$ ,  $w_2 = (-1, 2, 0)$ ,  $w_3 = (0, 0, 2)$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par la donnée des images des vecteurs de la base:

$$u(e_1) = w_1, u(e_2) = w_2, u(e_3) = w_3.$$

**Q 1** Donner la matrice de  $u$  dans la base canonique.

**Q 2** Soit  $W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $u(W)$ .

**Q 3** Trouver une base de  $\text{Ker}(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .

**Q 4** Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ .

**Q 5** Déterminer  $\text{Ker}(u - \text{Id})$  et  $\text{Im}(u - \text{Id})$  où  $\text{Id}$  désigne l'identité de  $\mathbb{R}^3$ . En déduire que  $u - \text{Id}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

---