Programme de colle 29

(25/05/2026 - 29/05/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Chapitre Y : Espaces vectoriels

- Tout le chapitre

Chapitre Z : Applications linéaires

- Définitions, noyau, image
- Bases et applications linéaires (détermination d'une application linéaire par l'image d'une base)
- Matrice d'une application linéaire

2 Pratique calculatoire :

Q 1 Montrer que $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto -2x - 4y + 7z \in \mathbb{R}$ est une application (forme) linéaire.

Q 2 Montrer que $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (3x - y, x) \in \mathbb{R}^2$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Q 3 Montrer que $h : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(1), P'(0)) \in \mathbb{R}^2$ est une application linéaire.

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (À préparer)**

Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

Q 1 Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sev de E.

Q 2 Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.

Q 3 Donner alors la décomposition de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

☐ **Exercice 2 (Cours)**

Q 1 Démontrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Q 2 *Application :* on considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(1), P'(0), P''(0))$.

a. Montrer que f est une application linéaire. **b.** Montrer que f est injective.

☐ **Exercice 3 (À préparer)**

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par : $u(P) = P + (1 - X)P'$.

Q 1 Montrer que u est un endomorphisme de E.

Q 2 Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$ et une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Q 3 Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels en somme directe.

☐ **Exercice 4 (À préparer (Z12))**

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et f un endomorphisme de E. Montrer que : $\ker(f \circ f) = \ker(f) \iff Im(f) \cap \ker(f) = \{0\}$