Programme de colle 28

(18/05/2026 - 22/05/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Chapitre Y : Espaces vectoriels

- Définitions, espaces de références
- Sous-espaces vectoriels (caractérisation, sous-espace engendré par une famille : Vect(...))
- Famille libre, famille génératrice, base
- Somme de sev, sommes directes, espaces supplémentaires

Info colleurs : pour les colles du lundi, être un peu indulgent sur la notion de supplémentaire, car elle sera toute fraîche 😉

2 Pratique calculatoire :

Dire si les familles suivantes sont libres ou liées :

Q 1 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u = (-3; 1; 0; 2)$, $v = (1; 1; 0; 0)$, $w = (1; 1; 1; 1)$.

Q 2 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1; 1; 1; 1)$, $u_2 = (2; 0; 2; 0)$, $u_3 = (-1; -1; 0; 0)$ et $u_4 = (0; 0; 1; 1)$.

Q 3 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions $f_1(x) = \sin(2x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ et $f_3(x) = \sin(x)$.

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (Cours, ⚠️ non fait en class !)**

Q 1 Si F et G sont deux sev de E, démontrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Q 2 Application : démontrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\right\}$ et $G = Vect\left\{(3, -1, 1)\right\}$ sont en somme directe.

☐ **Exercice 2 (À préparer)**

Soit les ensembles $F_1 = \{(0, y, z) \ , \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 3y - z = 0\}$.

Q 1 Trouver une famille génératrice pour chacun des ensembles F_1 et F_2.

Q 2 Trouver des générateurs des ensembles $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$.

Q 3 A-t-on : $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$? $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$?
Proposer un supplémentaire de F_2 dans $\mathbb{R}^3$.
(On ne peut (malheureusement !) pas encore utiliser la notion de dimension pour répondre à ces questions !)

☐ **Exercice 3 (À préparer)**

La famille $\mathcal{F} = \{1 + X, X + X^2, 1 + X^2\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$? Si oui, donner la décomposition de $P = X^2 + X + 1$. Est-elle unique ?
(On ne peut (malheureusement !) pas encore utiliser la notion de dimension pour répondre à ces questions !)

☐ **Exercice 4 (À préparer)**
Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Q 1 Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q 2 Démontrer que F et G sont supplémentaires.