

Programme de colle 25

(27/04/2026 - 01/05/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Chapitre V : Dérivabilité

- Dérivées d'ordre supérieur (Leibniz/récurrance)
- Th. fondamentaux (extremums, Rolle, TAF et IAF)

Chapitre W : polynômes

- Degré, division euclidienne, polynôme dérive (+ Taylor)

2 Pratique calculatoire

Deux parties cette semaine en pratique calculatoire : d'abord un peu de python pour manipuler les tableaux numpy, puis des questions de divisibilité de polynômes.

Q 1 Un peu de python avec numpy (2 points)

On considère que la bibliothèque numpy a été chargée par

```
import numpy as np
```

et que l'on dispose d'un tableau numpy à deux dimensions, nommé `tab`.

Vous serez interrogés sur une ou deux questions parmi les suivantes :

- Comment récupérer le nombre de lignes et le nombre de colonnes de ce tableau ?
- Comment, à l'aide d'un *slice*, extraire de ce tableau le sous-tableau obtenu en ne gardant que les colonnes impaires ?
- Comment, à l'aide d'un *slice*, extraire de ce tableau le sous-tableau obtenu en ne gardant que les lignes paires ?
- Comment, à l'aide d'un *slice*, extraire de ce tableau le sous-tableau obtenu en ne gardant que les éléments dont l'indice de ligne **et** l'indice de colonne est pair ?
- Comment, à l'aide d'un *slice*, extraire de ce tableau le sous-tableau obtenu en ne gardant que le quart supérieur gauche du tableau initial ?
- Créer un tableau `tab1` de même taille que `tab` dont toutes les cases ont la même valeur égale à la moyenne de toutes les valeurs de `tab`.

Q 2 Un peu de polynômes (2 points)

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

- $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$
- $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$
- $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$

3 Exercices/questions à préparer (8 points)

Exercice 1 (Cours)

Démontrons le théorème des accroissements finis à partir du théorème de Rolle :

- Illustrer par un croquis l'égalité des accroissements finis pour une fonction f définie sur $[a, b]$.
- Soit $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. Pour $x \in [a, b]$, notons $g(x)$ l'ordonnée du point M de la corde $[AB]$ ayant pour abscisse x . Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de $a, b, f(a)$ et $f(b)$.
- Soit h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$. Rappeler les hypothèses du théorème de Rolle et l'appliquer à la fonction h .
- En déduire l'égalité des accroissements finis.

 Exercice 2 (À préparer)

Q 1 Démontrer que pour tout $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$ (Penser aux accroissements finis...)

Q 2 On pose $v_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$
Dédire de Q1 que : $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq v_n \leq \ln(2n) - \ln n$ (Penser à un raisonnement en « cascade »...)

Q 3 En conclure que (v_n) converge et déterminer sa limite.

 Exercice 3 (À préparer)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

On note (u_n) la suite récurrente définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Q 1 a. Étudier les variations de f et montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ est stable par f .

b. Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

c. Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ dont on donnera la valeur exacte.

Q 2 a. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$. (On pourra penser à l'IAF...)

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

 Exercice 4 (À préparer)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

Q 1 Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Exprimer R en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$.

Q 2 Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. Exprimer R en fonction de $P(a)$ et de $P'(a)$.
