# Programme de colle 24

(06/04/2026 - 11/04/2026)

## 1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

**Chapitre U : continuité**

- Point de vue local, point de vue global, théorèmes des valeurs intermédiaires et de l'image d'un segment.

**Chapitre V : dérivation**

- Point de vue local (limite du taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1, interprétation graphique)
- Formule de Leibniz
- Point de vue global : théorème de Rolle.

## 2 Pratique calculatoire :

**Q 1** Déterminer les ensembles de définition/continuité/dérivabilité des fonctions suivantes (pas d'étude locale, on se contente des théorèmes généraux sur les opérations sur les fonctions continues/dérivables) :

**a.** $a(x) = \ln(\sqrt{x-1})$ | **b.** $b(x) = \ln(\sqrt{x-1}-1)$ | **c.** $c(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$ | **d.** $d(x) = \sqrt{\ln(x-1)-1}$

**Q 2** Calculer formellement les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

**a.** $f(x) = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ | **b.** $g(x) = \cos\left(\sqrt{\ln x}\right)$ | **c.** $h(x) = \sin(\cos(\sin x))$ | **d.** $k(x) = x^{\ln(x)}$

## 3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (À préparer)**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f$ définie sur $I = ]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

**Q 1** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

**Q 2** Factoriser $f(x) - x$

**Q 3** Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Q 4** Justifier que la suite $(u_n)$ est convergente.

**Q 5** Déterminer la limite $\ell$ de $(u_n)$.

☐ **Exercice 2 (À prépı rarer)**

Déterminer la dérivabilité des fonctions suivantes au point demandé :

**Q 1** $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ en 0. | **Q 2** $g(x) = |x| \sin x$ en 0. | **Q 3** $\begin{cases} (x-1) & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en 1.

### ☐ Exercice 3 (À préparer)

**Q 1** Déterminer la dérivée d'ordre $n$ de la fonction $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$.

**Q 2** En étudiant le cas $a = b$ déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

### ☐ Exercice 4 (Cours+application)

**Q 1** **a.** Citer **précisément** le théorème des extremums locaux (pas de démonstration).

**b.** Donner un contre-exemple pour la réciproque.

**c.** Donner un exemple montrant l'importance de la notion d'intérieur dans les hypothèses.

**Q 2** **a.** Citer précisément et démontrer le théorème de Rolle à partir du théorème des extremums locaux.

**b.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $x \in ]0;1[$ tel que $3ax^2 + 2bx = a + b$.