

Programme de colle 22

(23/03/2026 - 28/03/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

• Chapitre T : calcul matriciel

- Opérations sur les matrices (combinaisons linéaires, produits)
- Matrices carrées : puissances et inverse de matrices, notamment par la méthode du **polynôme annulateur**.

• Chapitre U : limites / continuité

- Limites : calcul à l'infini, en un point, théorèmes d'existence
- Continuité : **aspect local** (def, prolongement, caractère localement borné, passage à la limite)
- Continuité : **aspect global** (théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment par une fonction continue)

2 Pratique calculatoire :

Q1 Étudier la limite en a de la fonction f pour :

$$\text{a. } a = 1 \text{ et } f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} \quad \left| \quad \text{b. } a = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} \quad \left| \quad \text{c. } a = -1 \text{ et } f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1}$$

3 Exercices/questions à préparer

Exercice 1

Les trois questions sont indépendantes :

Q1 (*Continuité*) Pour chacune des deux fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} , dire si elles sont continues sur \mathbb{R} ou pas (on attend un raisonnement rigoureux) :

a. $f(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$,

b. $g(x) = \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Q2 (*Passage à la limite*) On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} qui est T -périodique et qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Q3 (*Théorème des valeurs intermédiaires*) On considère une fonction f définie et continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2 (À préparer)

Q1 Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\arcsin x - \pi/6}{2x - 1}$
(On mettra en évidence le taux de variations de la fonction arcsin entre 0 et 1/2.)

Q2 Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) - 2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

□ Exercice 3 (À préparer)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto 1 - \frac{x}{2} - x^n$

Q 1 Étudier la fonction f_n et montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0; 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

Q 2 Montrer que $f_{n+1}(x_n) = x_n^n(1 - x_n)$, en déduire que $f_{n+1}(x_n) > 0$.

Q 3 En utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, déduire de la Q2 que (x_n) est croissante.

Q 4 En déduire que (x_n) converge vers un réel ℓ .

Q 5 Supposons par l'absurde qu'il existe $M \in [0; 1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq M < 1$.

- a. Calculer dans ce cas la limite de x_n^n lorsque n tend vers $+\infty$ puis celle de x_n et conclure à une contradiction.
- b. En déduire la limite de (x_n) (*Attention de bien raisonner et rédiger ce passage...*)