Programme de colle 22

(23/03/2026 - 28/03/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

- **Chapitre S : suites**
  - Tout ! (et en particulier less suites adjacentes)
- **Chapitre T : calcul matriciel**
  - Opérations sur les matrices (combinaisons linéaires, produits)
  - Matrices carrées : puissances et inversion de matrices (plusieurs méthodes).

2 Pratique calculatoire :

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer son inverse si elle est inversible, sinon, donner sa matrice échelonnée réduite :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (Cours fait en classe)**

Q 1 Donner la définition d'une suite adjacente.

Q 2 Montrer que si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et elles ont la même limite.

☐ **Exercice 2 (À préparer)**

On considère la suite (u_n) définie de manière explicite pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \left(\frac{n+3}{4}\right)$.
À noter que dans cet exercice, on s'interdit d'utiliser des résultats sur les croissances comparées...

Q 1 Vérifier que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{n+3}\right)$.

Q 2 En déduire le sens de variation de (u_n) *(Attention, rédaction rigoureuse attendue...)*.

Q 3 Qu'en déduit-on au sujet de la convergence de (u_n) ?

Q 4 Montrer (sans utiliser de croissances comparées) que la suite u tend vers 0 (envisager un raisonnement par l'absurde).

☐ **Exercice 3 (À préparer)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☐ Exercice 4 (À préparer)

Q 1 Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Q 2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Conjecturer une expression de A^n en fonction de A valable pour tout entier $n \geqslant 1$.

b. Démontrer cette conjecture.

☐ Exercice 5 (À préparer)

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{n+1} = & 3a_n + & b_n & \\ b_{n+1} = & & 3b_n + & c_n \\ c_{n+1} = & & & 3c_n \end{array}\right.$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

Q 1 On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

Q 2 Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geqslant 3$.

Q 3 Montrer que:

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

Q 4 En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.