

# Programme de colle 21

(16/03/2026 - 20/03/2026)

## 1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

### Chapitre S : Suites réelles

- Définitions et modes de générations (explicite/implicite/récurrence)
- Vocabulaire (croissant/ décroissant/ majorée/ minorée...)
- Suites arithmétiques et géométriques (explicite/récurrence/limites/sommes)

- Limite (infinie/finie) : définition avec quantificateurs, opérations usuelles, limites et suites extraites.
- Opérations sur les limites
- Théorèmes de convergence
- Limites de suites monotones
- Suites adjacentes

## 2 Pratique calculatoire :

Étudier le **signe** des expressions suivantes :

$$A(x) = \frac{\frac{x^2 - 1}{x + 1} - x}{\frac{2x - 1}{x - 3} + 2} \quad B(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x + 3} \quad C(x) = x^3 - 7x + 6$$

## 3 Exercices/questions à préparer

### □ Exercice 1 (À préparer)

On considère la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

**Q 1** Montrer que pour tout  $k \geq 1$  on a :  $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$  et en déduire que :  $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n$

**Q 2** En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .

**Q 3** Soit la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ .

- Montrer que  $(u_n)$  est décroissante.
- Montrer que  $(u_n)$  est minorée par -2.
- En déduire que  $(u_n)$  est convergente.

### □ Exercice 2 (À préparer)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; 1]$  par :  $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 4}$

**Q 1** Étudier les variations de la fonction  $f$  et en déduire que  $f(I) \subset I$ .

**Q 2** Justifier alors que l'on peut définir la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ .

**Q 3 a.** Montrer que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) - x = \frac{(1-x)(x+2)}{x+4}$

- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

- c. Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

---

**Exercice 3 (À préparer)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; 1]$  par :  $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 4}$

- Q 1** Étudier les variations de la fonction  $f$  et en déduire que  $f(I) \subset I$ .
- Q 2** Justifier alors que l'on peut définir la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .
- Q 3** On définit la suite  $(v_n)$  de terme général  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a. Démontrer que  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{2}{5}$ , et donner sa forme explicite.
  - b. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire la convergence de la suite  $u_n$  ainsi que sa limite.

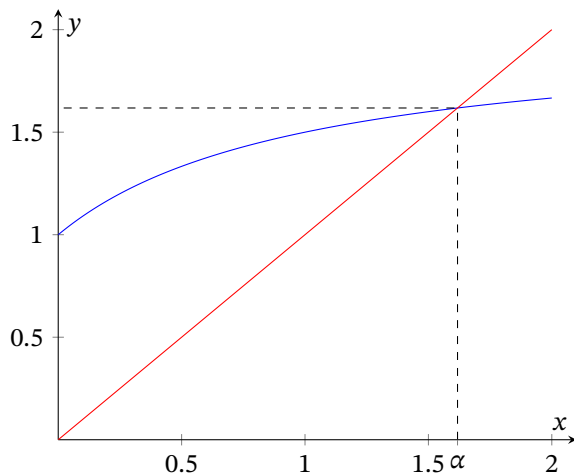
---

**Exercice 4 (Cours/exo...plus dur...)**

- Q 1** Démontrer au choix l'une des deux assertions du théorème de la limite monotone :  
Soit  $u$  une suite croissante :
  - Si  $u$  est majorée par  $M$ , alors il existe un réel  $\ell$  tel que  $u$  converge vers  $\ell \leq M$ .
  - Si  $u$  n'est pas majorée, alors elle diverge vers  $+\infty$ .

**Q 2** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{1 + u_n}$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2]$  par  $f(x) = 2 - \frac{1}{1 + x}$  dont le graph est donné ci-dessous :



On admettra sans démonstration que pour  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  :

- $f([0; \alpha]) \subset [0; \alpha]$ ,
- $\forall x \in [0; \alpha], f(x) \geq x$

Utiliser judicieusement ces informations pour :

- a. Montrer que  $u$  est convergente.
- b. Puis déterminer sa limite.

---