

# Programme de colle 20

(09/03/2026 - 13/03/2026)

## 1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

### Chapitre R : réels/sup/inf

- Les ensembles (en particulier les nombres irrationnels)
- Min,max, majorant, minorant, et **bornes supérieure/inférieure**
- Sup/inf d'une fonction
- **Retour sur le chapitre B** : travail sur les inéquations, avec éventuellement des valeurs absolues (mais faciles)...

### Chapitre S : Suites réelles

- Définitions et modes de générations (explicite/implicite/réurrence)
- Vocabulaire (croissant/ décroissant/ majorée/ minorée...)

## 2 Pratique calculatoire :

À noter : la pratique calculatoire est plus longue que d'habitude. Chaque étudiant devra traiter une des trois suites de chacune des 3 questions ci-dessous. Elle sera notée sur 6 points (au lieu de 4) et la partie non préparée sera réduite à 6 points (au lieu de 8).

Q1 En utilisant un repère et la droite  $y = x$ , représenter graphiquement les suites récurrentes suivantes et conjecturer leur comportement à long terme :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{a. } \begin{cases} u_0 = \frac{3}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 \end{cases} & 
 \text{b. } \begin{cases} v_0 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 - \frac{v_n}{2} \end{cases} & 
 \text{c. } \begin{cases} w_0 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 1 - w_n^2 \end{cases}
 \end{array}$$

Attention, car la conjecture sur le comportement de la suite  $w$  est sensible à la précision du dessin. Il est important de le faire avec précision sur feuille (ou ordinateur) avant de passer au tableau !

Q2 Pour chacune des suites précédentes, écrire une fonction python qui reçoit un entier  $n$  et qui renvoie la liste des  $n + 1$  premiers termes de la suite (et profitez-en pour vérifier si votre conjecture semble bonne...)

Q3 Trouver à l'aide d'une « récurrence descendante » la forme explicite des suites suivantes :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+1}{3} u_n \end{cases} \quad 
 v_n = \begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n - 3 \end{cases} \quad 
 w_n = \begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2\sqrt{w_n} \end{cases}$$

## 3 Exercices/questions à préparer

Exercice 1 (Fait en classe)

- Q1 Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
- Q2 Que pensez-vous du produit de deux irrationnels ?
- Q3 Montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

---

 **Exercice 2 (À préparer)**

**Q 1** Donner une définition (en français et aussi avec des  $\varepsilon$ ) de la borne supérieure d'un ensemble non vide  $X \subset \mathbb{R}$ .

**Q 2** Pour chacun des ensembles suivants, étudier les éventuels majorants, minorants, maximums, minimums, bornes supérieures, bornes inférieures (on essaiera de justifier plus ou moins rigoureusement les réponses...) :

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad B = \left\{ (-1)^n + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad C = \left\{ -2 + \frac{n+1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad D = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$$


---

---

 **Exercice 3 (À préparer)**

**Q 1** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$ , non vides et majorées. On note  $\alpha = \sup A$  et  $\beta = \sup B$ .

On définit l'ensemble  $A + B$  par :  $A + B = \{x + y / x \in A, y \in B\}$

a. Montrer que  $A + B$  est non vide et majoré par  $\alpha + \beta$ . Qu'en déduit-on pour  $\sup(A + B)$  ?

b. Soit  $\varepsilon > 0$ . Justifier qu'il existe  $x \in A$  tel que  $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x$ . (puis faire pareil avec  $y \in B$ ...)

c. En s'aidant des questions précédentes, montrer que :  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

**Q 2** (Fait en classe) *Rappel* : pour une fonction  $f$  définie sur  $X \in \mathbb{R}$ , on définit son sup par :  $\sup f = \sup\{f(x), x \in X\}$

Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions bornées définies sur une partie  $X \in \mathbb{R}$ .

a. Montrer que :  $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ .

b. Montrer qu'en général :  $\sup(f + g) \neq \sup f + \sup g$ .

---