Programme de colle 17

(02/02/2026 - 07/02/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Chapitre O : Éq. différentielles

- Équations différentielles d'ordre 1 et 2 à coefficients constants (seconds membres de la forme e^{at}, $A\cos(at)$, superposition, problème de Cauchy)

Chapitre P : Géométrie dans l'espace

- Produit scalaire, produit vectoriel et determinant (3 vecteurs)
- Eq. de plans

2 Pratique calculatoire :

Q 1 Géométrie, calculer :

$$A = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)^2$$

Q 2 Calculs d'analyse :

a. Dériver $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$ **b.** Primitiver $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **c.** Factoriser $x - x(x+1) + (2x+2)^2 + 1$

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (à préparer)**

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + \left(1+m^2\right) y = \left(1+4m^2\right)\cos(mx) \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

On discutera suivant que $m = 0$ ou $m \neq 0$.

☐ **Exercice 2 (à préparer)**

Dans la base orthonormée $\mathscr{B}_1\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1}$.

Q 1 Montrer (par la méthode de votre choix) que $\mathscr{B}_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 2 Soit $\vec{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans $\mathscr{B}_2$.

☐ **Exercice 3 (à préparer)**
On se place dans un repère orthonormé direct d'origine O. Soient $A(0;1;0)$, $B(1;1;0)$ et $H(0;0;1)$.

Q 1 En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}}\right)$.

Q 2 Vérifier que $||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AO}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BH}||^2 + ||\overrightarrow{AO}||^2$.

Q 3 **a.** Démontrer que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux, alors :

$$||\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$$

b. La réciproque est-elle vraie ?