Programme de colle 15

(19/01/2026 - 24/01/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Les deux TDs : introduction aux équations différentielles pour la physique/chimie :

- Savoir déterminer les solutions d'une équation différentielle du premier ou du second ordre, linéaires à coefficients constants (second membre constant aussi)...

Chapitre N : ensembles / applications
La totalité du chapitre, à savoir :

- I. Quelques notions de bases sur les ensembles (union, intersection, complémentaire, produit cartésien)
- II. Applications/fonctions (injectivité, surjectivité, bijectivité, application réciproque)

2 Pratique calculatoire :

Q 1 Donner l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles suivantes :

a. y”-3y’+2y=2 **b.** y”+2y’+2y=3 **c.** y”+2y’+y=1

Q 2 Écrire un **code python** pour tracer la représentation graphique des fonctions suivantes (on utilise ici uniquement les bibliothèque matplotlib et math. Les listes de valeurs seront construites soit par *compréhension*, soit avec une boucle *for/while*, et le pas choisi est de $dx = 0.1$) :

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$ sur $[-2; 5]$ **b.** $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $[-3; 3]$ **c.** $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$ sur $[0; 4]$

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (Cours)**
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to H$ deux applications.

Q 1 Rappeler les définitions (*en français* et avec des quantificateurs) de f injective et de f surjective.

Q 2 Montrer que si f et g injectives alors $g \circ f$ est injective.

Q 3 Montrer que si f et g surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

☐ **Exercice 2 (Cours)**
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

Q 1 Rappeler la définition (*en français* et avec des quantificateurs) de f bijective.

Q 2 On a vu en cours que :
« f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre si et seulement si $f \circ g = Id_F$ ET $g \circ f = Id_E$ »
Montrer à l'aide d'un exemple que si l'on a uniquement $f \circ g = Id_F$, cela ne suffit pas pour en déduire la bijectivité.

Q 3 Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, on note $h = g \circ f$. Que peut-on dire de la bijectivité de h ? Exprimer h^{-1} en fonction de f^{-1} et g^{-1} (la justification n'est pas demandée ici).

☐ Exercice 3 (Fait en classe)

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow H$ deux applications.

Q 1 Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Q 2 Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

☐ Exercice 4 (Fait en classe)

On considère les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n \text{ et } \begin{cases} g(n) = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ g(n) = \frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g, puis déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.