Programme de colle 14

(12/01/2026 - 16/01/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Chapitre M : nombres complexes
La totalité du chapitre, à savoir :

- I. Forme algébrique (opérations, conjugué, module, formules d'Euler)
- II. Forme trigo/forme expo (Notation $\mathrm{e}^{i\theta}$, Moivre, Euler, passage algébrique ↔ expo)
- III. Racines carrées et équations du second degré à coefficients complexes
- IV. Racines n-ièmes d'un nombre complexe (cas particulier des racines de l'unité)

2 Pratique calculatoire :

Déterminer le lieu des points $M(z)$ tels que :

Q 1 $|z-i|=2$

Q 2 $|2z-4|=2$

Q 3 $|z-i|=|z-1|$

Q 4 $|\overline{z}+1-i|=\sqrt{2}$

Q 5 $\arg(z)\equiv\pi/3\ (2\pi)$

Q 6 $\arg(z)\equiv\pi/3\ (\pi)$

Q 7 $\arg\left(\overline{z}\right)\equiv\pi/6\ (\pi)$

Q 8 $\arg(z-i)\equiv\pi/4\ (2\pi)$

Q 9 $\arg(iz)\equiv\pi/4\ (2\pi)$

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (à préparer)**

Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$. On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|\omega_k-1|^2$, où ω_k sont les racines n-ièmes de l'unité :

Q 1 Donner la forme exponentielle de ω_k.

Q 2 Montrer que $|\omega_k-1|^2=2\left(1-\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)\right)$ *(Utiliser $|z-z'|^2=\dots$, ou penser à l'arc moitié.)*

Q 3 En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|\omega_k-1|^2=2n$

☐ **Exercice 2 (à préparer)**

Résoudre l'équation $(E)\quad 2z^2-(9i+1)z-7+11i=0.$ *(Ça peut servir : $|-24-70i|=\sqrt{24^2+70^2}=74$)*

☐ **Exercice 3 (à préparer)**

Recherche des racines carrées de $1+i$, à l'aide de deux méthodes différentes :

Q 1 En posant $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ *(méthode trigonométrique)*

Q 2 En posant $z=x+iy$ et en résolvant un petit système *(méthode algébrique)*

Q 3 En déduire des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

☐ Exercice 4 (fait en classe)

Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ *(Penser à l'exponentielle complexe...)*