

Programme de colle 13

(05/01/2026 - 10/01/2026)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Chapitre M : nombres complexes

- I. Forme algébrique (opérations, conjugué, module, formules d'Euler)
- II. Forme trigo/forme expo (notation $e^{i\theta}$, Moivre, Euler), passage algébrique \leftrightarrow expo

2 Pratique calculatoire :

Q1 Déterminer les formes algébriques de :

a. $4(-2 + 5i) + 3(2 - 8i)$

b. $(2 + i)(3 - 2i)$

c. $(1 + i)^3$

d. $\frac{1 + i}{1 - i}$

e. $\frac{3 + 2i}{2i}$

f. $\frac{1}{1 + i\sqrt{3}}$

g. $\frac{(2 + 3i)^2}{4 - i}$

Q2 Déterminer les formes exponentielles de :

a. $2 + 2i$

b. $-3i$

c. $-1 - i$

d. $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$

e. $\frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 - i)^5}$

f. $-3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

g. $-1 + 3i$ (avec un arctangente)

3 Exercices/questions à préparer

Exercice 1 (Cours)

Q1 Démontrer l'inégalité triangulaire $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Pour cela :

- Montrer que si $k \in \mathbb{C}$, alors $|1+k|^2 \leq (1+|k|)^2$ (remarque : on pourra se contenter d'une interprétation graphique pour justifier que $Re(k) \leq |k|$).
- Traiter le cas $z = 0$, puis le cas $z \neq 0$ en posant $k = \frac{z'}{z}$.

Q2 Application : démontrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z| \leq 1\}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{G} = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z+i-1| \leq 3\}$, puis dessiner ces deux ensembles.

Exercice 2 (Fait en classe)

Pour tout $z \neq 2$, on définit $f(z) = \frac{z + 1}{z - 2}$

Q1 Déterminer l'ensemble : $\mathcal{F} = \{M(z) \in \mathcal{P} / f(z) \in \mathbb{R}\}$

(On demande une solution en utilisant uniquement z et \bar{z} , sans revenir à une écriture du type $z = a + ib...$)

Q2 Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble : $\mathcal{G} = \{M(z) \in \mathcal{P} / f(z) \in i\mathbb{R}\}$

(On n'hésitera pas cette fois-ci à poser $z = a + ib$ si l'on en a besoin...)

 Exercice 3

Avec peu de calculs, déterminer les sous-ensembles du plan complexe \mathcal{P} :

Q 1 $\mathcal{E}_1 = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z - 1| = |z - i|\}$

Q 2 $\mathcal{E}_2 = \{M(z) \in \mathcal{P} / |-2iz + 2 + 4i| = 4\}$

Q 3 $\mathcal{E}_3 = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z - 2 + i| = |\bar{z} + 3i|\}$

 Exercice 4 (À préparer)

Q 1 Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

Q 2 Linéariser $\sin^5(x)$, c'est à dire pour exprimer $\sin^5(x)$ en fonction des $\sin(nx)$ avec n entier.
