

# Programme de colle 12

(15/12/2025 - 20/12/2025)

## 1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

### Chapitre L : sommes

- Règles de calcul
- Changements d'indices (translation, symétrie, sommes télescopiques)
- Sommes classiques (sommes arithmétiques, sommes géométriques, somme des carrés)
- Factorisation de  $a^n - b^n$
- Sommes doubles (rectangulaires/triangulaires)
- Coefficients binomiaux et binôme de Newton

## 2 Pratique calculatoire :

Calculer les sommes et produits suivants :

<b>Q1</b> $\sum_{k=3}^{25} 3$	<b>Q3</b> $\sum_{i=1}^{11} (3 \times 5^i - 2)$	<b>Q5</b> $\prod_{i=1}^{12} \exp(-3i + 2^i)$	<b>Q7</b> $\sum_{k=0}^n (2k - 4^k)$
<b>Q2</b> $\sum_{k=1}^{200} (-2k + 4)$	<b>Q4</b> $\prod_{k=1}^{12} 2^k$	<b>Q6</b> $\sum_{k=0}^n \left( \frac{-3}{7^k} + 3^k \right)$	<b>Q8</b> $\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{3^i}$

## 3 Exercices/questions à préparer

### Exercice 1 (Cours)

**Q1** Sans utiliser de récurrence, démontrer (rigoureusement) la formule suivante :  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$   
*(Indic : écrire la relation  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$  pour  $k$  variant de 1 à  $n$  et sommer...)*

**Q2** Écrire une fonction python qui reçoit un entier  $n$  et qui renvoie le calcul de la somme obtenu informatiquement avec une boucle.

\_\_\_\_\_

### Exercice 2 (À préparer)

**Q1** On note  $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$  en posant  $j = n - k$ , trouver une autre expression pour  $S_n$  puis calculer  $2S_n$  pour enfin déduire  $S_n$ .

**Q2** Écrire une fonction python qui reçoit un entier  $n$  et qui renvoie le calcul de la somme obtenue informatiquement avec une boucle.

\_\_\_\_\_

**Exercice 3 (À préparer)**

**Q 1** (Cours) On considère les trois sommes doubles :  $S_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} 1$ ,  $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$  et  $S_3 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1$ . Expliquer comment visualiser ces sommes à l'aide d'un tableau de taille  $n \times n$ , puis donner les valeurs des trois sommes *sans faire de calculs*.

**Q 2** Calculer  $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i + j)$  (Réponse :  $S = n^2(n + 1)$ )

**Q 3** Écrire une fonction python qui reçoit un entier  $n$  et qui renvoie le calcul de la somme  $S$  obtenue informatiquement avec une double boucle.

\_\_\_\_\_

**Exercice 4**

**Q 1** Calculer pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \min(i, j)$ . (Réponse :  $n(n + 1)(2n + 1)/6$ )

**Q 2** Écrire une fonction python qui reçoit un entier  $n$  et qui renvoie le calcul de la somme  $S_n$  obtenue informatiquement avec une double boucle.

\_\_\_\_\_