

Programme de colle 10

(01/12/2025 - 06/12/2025)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

• **Chapitre J : étude de fonctions**

- Notion de fonction (ensemble de définition, opérations, composition)
- Fonctions paire, impaires, périodiques
- Fonctions majorées, minorées, bornées. Extremums

- Monotonie et comportement asymptotiques
- Calculs de dérivées (notamment avec composition)
- Tangente / Meilleure approximation affine
- Injectivité, surjectivité et bijectivité
- Fonction réciproque (et sa dérivée)

2 Pratique calculatoire :

Déterminer les **ensembles de définition** des fonctions suivantes, puis calculer leur **fonction dérivée**. Comparer l'ensemble de définition de la fonction avec l'ensemble de définition de sa dérivée.

Q 1 $f(x) = (4x^3 - 3x)(x + 2)$

Q 2 $f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x^2 - 1}$

Q 3 $f(x) = (5x - 2)^3$

Q 4 $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

Q 5 $f(x) = \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$

Q 6 $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 1}$

Q 7 $f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)}$

Q 8 $f(x) = (\ln(x^2 + 1))^3$

Q 9 $f(x) = (3x^2 + 1)^5$

3 Exercices/questions à préparer

Exercice 1 (Cours)

On considère une fonction $f : I \rightarrow J$.

- Q 1 a. Rappeler les définitions avec quantificateurs de f surjective, f injective, et f bijective.
 b. Donner la négation avec quantificateurs de f injective.

- Q 2 a. Montrer que si f est strictement monotone sur I alors f est bijective de I sur $f(I)$.
 b. Justifier par un graphique que la réciproque est fausse.

- Q 3 **Application** : on considère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{1 + e^x}$.
 Démontrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

Exercice 2 (À préparer)

Considérons les fonctions f et g définies sur $I =]-1; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1 + x)$.

- Q 1 Déterminer les positions relatives des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g pour $x \in I$.
 Q 2 Démontrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont une tangente commune (commencez par faire une conjecture avec geogebra ou avec votre calculatrice...).

□ Exercice 3 (C'est le J25, non fait en classe)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Q 1 Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de f et étudier sa parité.

Q 2 Déterminer le tableau de variations de f sur $I = [0; +\infty[$.

Q 3 Justifier que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque que l'on notera g . On donnera son ensemble de définition et son sens de variation.

Q 4 Bonus (hors question de cours): déterminer l'expression de $g(y)$ pour $y \in]0; \frac{1}{2}]$.

Pour cela on pourra résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x pour $y \in]0; \frac{1}{2}]$ en posant $X = e^x$...
