Programme de colle 9

(24/11/2025 - 28/11/2025)

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

- **Chapitre I :** trigonométrie (équations et inéquations trigonométriques)
- **Chapitre J :** étude de fonctions
  - Notion de fonction (ensemble de définition, opérations, composition)
  - Fonctions paire, impaires, périodiques
  - Fonctions majorées, minorées, bornées. Extremums
  - Monotonie et comportement asymptotiques
  - Nombre dérivé, tangente, fonction dérivée, étude de variations

2 Pratique calculatoire :

Q 1 Compléter les formules trigonométriques suivantes (chacun tombera sur 3 formules !) :

a. $\cos^2 x + \sin^2 x =$ ....

b. $\cos^2 x - \sin^2 x =$ ....

c. $\sin(2x) =$ ....

d. $\cos^2 x =$ .... (avec $\cos(2x)$)

e. $\sin^2 x =$ .... (avec $\cos(2x)$)

f. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) =$ ....

g. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) =$ ....

h. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) =$ ....

i. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) =$ ....

j. $\cos(x + \pi) =$ ....

k. $\sin(x + \pi) =$ ....

l. $\sin(a + b) =$ ....

m. $\cos(a + b) =$ ....

n. $\tan(a + b) =$ ....

o. $\sin(p) + \sin(q) =$ ....

p. $\cos(p) + \cos(q) =$ ....

Q 2 **Un peu de Python**. Rappelons deux petites choses :

- pour utiliser les fonctions trigonométriques, il faut importer le module `math` en mettant en première ligne :

```
import math
```

  puis on accède par exemple à la fonction sinus par `math.sin(x)`.
- pour tester si deux **flottants** a et b sont égaux il n'est pas judicieux d'écrire `a==b` (à cause des erreurs d'arrondi), on préfère donc écrire `abs(a-b)<10**(-6)` pour dire que l'écart entre les deux nombres est inférieur par exemple à un millionième.

a. Écrire une fonction python `somme(x : float, n : int)->float` qui reçoit un flottant x et un entier n et qui renvoie la somme : $\cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$.

b. Écrire une fonction python `somme_alternee(x : float, n : int)->float` qui reçoit un flottant x et un entier n et qui renvoie la somme : $\sin(x) - \sin(2x) + \sin(3x) \cdots + (-1)^{n-1}\sin(nx)$.

c. Écrire une fonction python `test1(n : int)-> bool` dont le but est de tester la validité de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Cette fonction reçoit un entier n. Elle doit alors tester la formule précédente pour les valeurs de x égales à $\dfrac{2k\pi}{n}$ pour k entier entre 0 et $n-1$. Elle renvoie `True` si les calculs précédents sont tous valides et `False` sinon.

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (Fait en grande partie en classe)**

Q 1 Rappeler la définition avec des quantificateurs de : « f est majorée sur $\mathcal{D}$ » et de « f n'est pas majorée sur $\mathcal{D}$ »

Q 2 Justifier rigoureusement que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos(x)$ n'est pas majorée.

Q 3 Justifier par un contre-exemple que le produit de deux fonctions majorées n'est pas nécessairement majoré.

Q 4 Que dire de la somme de deux fonctions majorées ? Démontrer votre réponse…

☐ **Exercice 2 (À préparer)**

Q 1 On rappelle la définition de « f croissante sur $\mathcal{D}$ » : $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Donner alors la définition de « f n'est pas croissante sur $\mathcal{D}$ »

Q 2 On définit la fonction g par $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

- **a.** Quel est son ensemble de définition maximal ?
- **b.** Justifier soigneusement à l'aide de la question Q1 que g n'est pas croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
- **c.** Étudier la parité de g.
- **d.** Grâce à la dérivation donner le tableau de variation complet de la fonction g (et confirmer la réponse en Q2b).
- **e.** Donner la limite en $+\infty$ de $g(x) - x$ et faire un rapide croquis de la représentation graphique de g.

☐ **Exercice 3 (À préparer, c'est le J18 non fait en classe)**

Q 1 Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

- **a.** Étudier les variations de g.
- **b.** En déduire que : $\forall x > 0,\ g(x) \geqslant 1$.

Q 2 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x}$.

- **a.** Déterminer son ensemble de définition maximal $\mathcal{D}_f$.
- **b.** Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- **c.** Étudier le sens de variation de f et construire son tableau de variation.
- **d.** Faire un croquis rapide de $\mathcal{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.