

# Programme de colle 07

(10/11/2025 - 15/11/2025)

## 1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

### Chapitre H : récurrences

- récurrences avec des égalités, des inégalités
- récurrences sur des formules avec "petits points"

## 2 Pratique calculatoire informatique :

On considère dans cette partie la suite  $(u_n)$  définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \end{cases}$$

Pour chacune des fonctions demandées on précisera la *docstring*.

- Q1** Écrire une fonction python `suite(n : int) -> float` qui reçoit un entier  $n$  et qui renvoie la valeur de  $u_n$ .
- Q2** Écrire une fonction python `seuil() -> float` qui renvoie le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > 1000$ . (On admet qu'un tel entier existe).
- Q3** Écrire une fonction python `somme(n : int) -> float` qui reçoit un entier  $n$  et qui renvoie la somme  $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

## 3 Exercices/questions à préparer

### Exercice 1 (À préparer)

On considère la suite définie par récurrence de la façon suivante :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \end{cases}$

- Q1** Calculer les termes  $u_1$  à  $u_4$ .
- Q2** À l'aide des premiers termes calculés précédemment, conjecturer une formule explicite pour la quantité  $u_n - n$ .
- Q3** En déduire une formule explicite pour la suite  $(u_n)$  que l'on démontrera par récurrence.

### Exercice 2 (Fait en classe)

Pour tout entier  $n \geq 1$  on note :  $\pi_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ . Montrer que :  $\pi_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

### Exercice 3 (À préparer)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ .  
On note  $P(n)$  la proposition «  $u_n = 1 + 2^n$  ».

- Q1** Montrer que  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies.
- Q2** Pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, montrer que si  $P(n)$  et  $P(n+1)$  sont vraies alors  $P(n+2)$  est vraie.
- Q3** Qu'en conclure pour la suite  $(u_n)$  ?

---

**□ Exercice 4 (À préparer)**

**Q 1** On considère pour tout entier  $n \geq 2$ , les produits suivants :

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad B_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 2$  on a  $A_n = \frac{1}{n}$  et  $B_n = \frac{n+1}{2}$ .

**Q 2** On considère ensuite le produit suivant pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$C_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Déduire l'expression  $C_n$  en fonction de  $n$  puis la valeur numérique exacte de  $C_{10}$ .

---