Programme de colle 5

(13/10/2025 - 17/10/2025)

⚠ Point importent !

En cas d'empêchement impondérable et impossible à éviter, il est de votre responsabilité de contacter le colleur (en passant éventuellement par votre prof de math...) pour organiser le remplacement de votre colle. Toute absence non remplacée implique la note nulle.

1 Le programme de colle porte cette semaine sur...

Chapitre E : calculs de limites

- Limites de références (en un point (droite/gauche) ou au voisinage de l'infini)
- Limites et opérations (+,-,/,*,composition)
- Quelques formes indéterminées (fractions rationnelles, croissances comparées)
- Théorèmes de comparaison (gendarmes...)

Chapitre F : produit scalaire

- Définitions : géométrique, analytique
- Orthogonalité : projection orthogonale d'un vecteur sur un autre et application au produit scalaire
- Déterminant (définition, lien avec l'aire d'un triangle, expression analytique)

2 Pratique calculatoire :

Q 1 Factoriser au maximum dans $\mathbb{R}$:

- $A = (x-1)^2 - (x-1)$
- $B = 2(x+2)^2 - 3(x+2) + x^2(x+2)$
- $C = 7(x-7) - x(x-7) + 4(x-7)$
- $D = \dfrac{x}{x-1} + x + 1$
- $E = 7x(2x+3) + 2x + 3$
- $F = (5x-1)(2x+3) - 5x + 1$
- $G = (2x+6)(x-5) + 3x + 9$

Q 2 Donner les valeurs possibles de α lorsque :

a. $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\sin(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $\cos(\alpha) = -\dfrac{1}{2}$ **d.** $\sin(\alpha) = -1$

3 Exercices/questions à préparer

☐ **Exercice 1 (À préparer)**

Q 1 Donner les 5 types de formes indéterminées vues en cours.

Q 2 Déterminer les limites suivantes (penser à voir les ensembles de définition et distinguer si besoin limite à droite et limite à gauche...) :

a. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + 1$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{x+1}$ **d.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)}$

☐ Exercice 2 (Question de cours)

Q 1 **a.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Démontrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{w}$ appelé projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ tel que $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ *(un raisonnement par "analyse/synthèse" est attendu...)*

b. Application : on considère $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée et $\vec{w}$ un vecteur. Compléter à l'aide de produits scalaires : $\vec{w} = \ldots \vec{\imath} + \ldots \vec{\jmath}$

Q 2 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

☐ Exercice 3 (À préparer)

$\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée du plan et a un nombre réel.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix} a-4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Q 1 Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ constituent-ils une base du plan ?

Q 2 Donner la (ou les) valeurs éventuelles de a pour que cette base soit orthogonale.

Q 3 Pour quelles valeurs éventuelles de a cette base est-elle orthonormée ?